Théorème de Riesz-Fischer

Théorème . $L^p(\Omega)$ est complet pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Preuve :
On commence par traiter le cas $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans L^p. Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq n_1 \implies \|f_p - f_q\| \leq \frac{1}{2}.$$

AInsi par récurrence, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $n_{k+1} > n_k$ et

$$p, q \geq n_{k+1} \implies \|f_p - f_q\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

En posant $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, on a

$$g_n \in L^p \quad \text{et} \quad \|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Par le théorème de convergence monotone, il existe $g \in L^p$ tel que $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ pour presque tout x. De plus, pour $p \geq q \geq 2$ on a

$$|f_{n_p}(x) - f_{n_q}(x)| \leq \sum_{k=q}^{p-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) - g_{q-1}(x) \leq \varepsilon$$

presque partout, pour q suffisamment grand. Donc $(f_{n_k}(x))_k$ est de Cauchy pour presque tout x et converge vers une limite notée $f(x)$. De plus, on a

$$|f(x) - f_{n_q}(x)| \leq g(x) - g_{q-1}(x) \leq g(x).$$

Donc $|f_n - f_{n_k}|^p$ converge simplement vers 0 et est majorée uniformément en n par g^p qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\|f - f_{n_k}\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente, d'où le résultat.

On étudie maintenant le cas $p = \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^∞. Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq N_k \implies \|f_p - f_q\|_\infty \leq \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire qu'il existe E_k négligeable tel que

$$\forall p, q \geq N_k, \forall x \in \Omega \backslash E_k, \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

On pose $E = \cup_k E_k$, qui est négligeable car $\lambda(E) = \lim_{N\to\infty} \lambda(\cup_{k\leq N} E_k) = 0$. On a alors pour tout $x \in \Omega\backslash E$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$ et pour $n \geq N_k$

$$\forall x \in \Omega\backslash E, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Donc $f \in L^\infty$ et

$$n \geq N_k \implies \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

donc $(f_n)_n$ converge vers f dans L^∞.

□

Remarque On démontre de plus que si $(f_n)_n$ converge vers f dans L^p, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f à une extractrice près. C'est un résultat important qui sert par exemple pour calculer des transformations de Fourier dans L^2. On s'est placé dans $\mathbb{R}^n$ mais le résutat reste vrai avec sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé tant que l'espace d'arrivé est complet.