Critère de nilpotence de Cartan

Lemme . Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soit $M = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D = P(M)$ et $P(0) = 0$.

Preuve :
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de M, de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Alors $\chi_M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Comme tous les λ_i sont distincts, le lemme des restes chinois assure l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad P \equiv \lambda_i \quad \left[(X - \lambda_i)^{\alpha_i}\right].$$

D'après le lemme des noyaux, on a la décomposition $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(M)$. Soit $X = X_1 + \ldots + X_r \in \mathbb{K}^n$, avec $X_i \in \mathrm{Ker}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(M)$. Par construction, il existe $R_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(M) = \lambda_i I_n + R_i(M)(M - \lambda_i I_n)^{\alpha_i},$$

donc $P(M)X_i = \lambda_i X_i = DX_i$. Donc $P(M)X = DX$.
Si $\chi_M(0) = 0$, le lemme est prouvé. Sinon, il suffit de rajouter le polynôme X lors de l'utilisation du lemme des restes chinois, qui est dans ce cas premier avec χ_M.

□

Théorème . Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos. Soient $\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux sous-espaces vectoriels. Pour $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $[M, N] := MN - NM$ et

$$\mathscr{L} := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ ; \ \forall A \in \mathscr{A}, [M, A] \in \mathscr{B}\}.$$

Soit $M \in \mathscr{L}$ tel que $\forall N \in \mathscr{L}, \mathrm{Tr}(MN) = 0$. Alors M est nilpotente.

Preuve :
Quitte à travailler avec PMP^{-1} pour P bien choisie, on peut supposer M sous sa forme de Jordan. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.
Soit φ une forme $\mathbb{Q}$-linéaire sur $F := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{K}$. On pose alors $L = \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n))$
Si $L \in \mathscr{L}$, on a

$$\mathrm{Tr}(ML) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\lambda_i) = 0,$$

les matrices étant triangulaires supérieures. En composant par φ, on a $\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)^2 = 0$, ce qui donne $F^* = \{0\}$ car $\varphi(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$. On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et M nilpotente.

Il suffit alors de montrer que $L \in \mathscr{L}$. On considère la forme de Dunford $M = D + N$, $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos.

Pour $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $D_X(M) = MX$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $D_X^i(M) = MX^i$ donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a
$$P(D_X) = D_{P(X)}.$$

Une matrice étant diagonalisable si et seulement si elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples, on a

$$\left| \begin{array}{ccc} X \text{ diagonalisable} & \Longrightarrow & D_X \text{ diagonalisable,} \\ X \text{ nilpotente} & \Longrightarrow & D_X \text{ nilpotente.} \end{array} \right.$$

On pose $G_X(M) := XM$ qui possède les mêmes propriétés et on a

$$\Big(D_X \circ G_X\Big)(M) = XMX = \Big(G_X \circ D_X\Big),$$

donc D_X et G_X commutent. Donc

$$\left| \begin{array}{c} D_D \text{ et } G_D \text{ sont codiagonalisables,} \\ G_N - D_N \text{ est nilpotente.} \end{array} \right.$$

Donc
$$[M, \,\cdot\,] = [D, \,\cdot\,] + [N, \,\cdot\,]$$
est la décomposition de Dunford de $[M, \,\cdot\,]$, car comme D et N commutent, $[D, \,\cdot\,]$ et $[N, \,\cdot\,]$ commutent aussi. En particulier, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $[D, \,\cdot\,] = P([M, \,\cdot\,])$ et $P(0) = 0$. Or

$$[D, E_{ij}] = DE_{ij} - E_{ij}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{et} \quad [L, E_{ij}] = \Big(\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_j)\Big)E_{ij}.$$

On peut alors trouver un polynôme Q tel que

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ Q(\lambda_i - \lambda_j) = \varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_j),$$

par exemple grâce aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Q vérifie donc la relation $Q([D, \,\cdot\,]) = [L, \,\cdot\,]$, car il la vérifie sur la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, $[D, \,\cdot\,]^k(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)^k E_{ij}$. Donc
$$[L, \,\cdot\,] = (Q \circ P)([M, \,\cdot\,]).$$

Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors par hypothèse $[M, A] \in \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Par récurrence, on en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $[M, \,\cdot\,]^i(A) \in \mathscr{B}$. Or $(Q \circ P)(0) = 0$ donc $(Q \circ P)([M, \,\cdot\,])(A) \in \mathscr{B}$, ce qui permet de conclure.

$\square$