Lemme de Morse

Lemme . Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage U de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : U \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tels que $\forall A \in U, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$. Autrement dit, le changement de base des formes quadratiques dépend localement de manière C^1 de la forme quadratique.

Preuve :
On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & {}^tPA_0P \end{array}.$$

φ est de classe C^1 car polynomiale et

$$\varphi(I_n + H) = A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H$$

Donc $d\varphi_I H = A_0H + {}^tHA_0$. On va maitenant chercher à appliquer le théorème d'inversion locale, cependant $d\varphi_I$ n'est pas inversible :

$$\begin{aligned} d\varphi_I H = 0 \quad & \iff \quad A_0H = -{}^tHA_0 \\ & \iff \quad A_0H \in \mathscr{A}_n \end{aligned}$$

On va utiliser la décomposition suivante

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus A_0^{-1}\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

car A_0 est inversible. On pose $\Phi = \varphi|_{A_0^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$. Alors $d_{I_n}\Phi$ est injective donc inversible car $\dim\left(A_0^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right)$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de $\Phi(I_n) = A_0$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : U \to A_0\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tels que

$$\forall A \in U, \quad (\Phi \circ \psi)(A) = A.$$

De plus, $GL_n(\mathbb{R})$ étant ouvert, on peut supposer $\psi(U) \subset GL_n(\mathbb{R})$ quitte à réduire U.

□

Théorème . Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $f(0) = 0$. On suppose que $D_0 f = 0$ et que $D_0^2 f$ est de signature $(p, n-p)$. Alors il existe des voisinages U et V de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme tels que

$$f\left(\varphi^{-1}(u)\right) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

où $u = (u_1, \ldots, u_n) = \varphi(x)$.

Preuve :
Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = \int_0^1 (1-u)^t x \left(D^2_{ux} f\right) x \mathrm{d}u = {}^t x Q(x) x$$

avec $Q(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u) D^2_{ux} f \mathrm{d}u \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Par le lemme, il existe un voisinage W de $Q(0)$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\psi : W \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tels que

$$\forall A \in W, \quad A = {}^t\psi(A) Q(0) \psi(A).$$

Par continuité de Q, il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in U, \quad Q(x) = {}^t\psi\Big(Q(x)\Big) Q(0) \psi\Big(Q(x)\Big).$$

D'après le théorème de Sylvester, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in U, \quad Q(x) = {}^t\psi\Big(Q(x)\Big) {}^t P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P \psi\Big(Q(x)\Big).$$

On considère alors

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & P\psi\Big(Q(x)\Big)x \end{array} \right. ,$$

qui est de classe C^1 et $d_0\varphi(h) = P\psi\Big(Q(0)\Big)h$ donc $d_0\varphi$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, φ est un C^1-difféomorphisme local et si $u = \varphi(x)$, alors

$$f\Big(\varphi^{-1}(u)\Big) = {}^t u \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} u.$$

□