Méthode de la puissance

On définit par récurence pour $z \in \mathbb{C}^*$ la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\left| \begin{array}{lcl} z_0 & = & \frac{z}{\|z\|_2} \\ \\ z_{k+1} & = & \frac{Az_k}{\|Az_k\|_2} \qquad \text{pour } k \geq 0 \end{array} \right.$$

et la suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $\xi_k = z_k^* A z_k$ pour $k \geq 0$. On introduit la distance sur les droites de $\mathbb{C}^n$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}, d_P(u,v) = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|u-\lambda v\|_2}{\|u\|_2}.$$

L'idée de la méthode de la puissance est que la direction $A^k z$ converge vers la direction propre associée à la valeur propre de plus grand module pour la plupart des $z \in \mathbb{C}^n$.

Théorème . Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Soit $x_1 \in E_{\lambda_1}(A)$. Alors il existe un ensemble ouvert et dense $\mathscr{U} \subset \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $z \in \mathscr{U}$,

- Les suites $(z_k)_k$ et $(\xi_k)_k$ sont bien définies.
- $d_P(z_k, x_1) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $\xi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$.

Preuve :
On commence par écrire A sous sa forme de Jordan. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres sans multiplicité. Comme λ_1 est de multiplicité 1, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & J_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_p \end{pmatrix}$$

avec $J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ un bloc de Jordan. On note $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$ les vecteurs colonnes de P, qui forment une base de $\mathbb{C}^n$. On considère

$$\mathscr{U} := \Big\{ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \ ; \ \alpha_1 \neq 0 \Big\},$$

qui est un ouvert dense de $\mathbb{C}^n$. Soit $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in \mathscr{U}$. On montre par récurec que $z_k = \dfrac{A^k z}{\|A^k z\|_2}$. En effet, $z_0 = \dfrac{z_0}{\|z_0\|_2}$ et pour $k \geq 0$, on a

$$z_{k+1} = \frac{Az_k}{\|Az_k\|_2} = \frac{A \frac{A^k z}{\|A^k z\|_2}}{\|A \frac{A^k z}{\|A^k z\|_2}\|_2} = \frac{A^{k+1} z}{\|A^{k+1} z\|_2}.$$

On va montrer que
$$A^k z = \lambda_1^k(\alpha_1 x_1 + e_k)$$
avec $e_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On pourra alors en déduire que
$$d_P(z_k,x_1)^2 = d_P(A^k z,x_1)^2 = d_P\left(x_1+\frac{e_k}{\alpha_1},x_1\right)^2 = 1-\frac{|\langle x_1+\frac{e_k}{\alpha_1},x_1\rangle|^2}{\|x_1+\frac{e_k}{\alpha_1}\|_2^2\|x_1\|_2^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et
$$\begin{aligned} z_k^* A z_k &= \frac{\left(A^k z\right)^*}{\|A^k z\|_2} A \frac{A^k z}{\|A^k z\|_2} = \left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{\overline{\alpha_1} x_1^* + e_k^*}{\|\alpha_1 x_1 + e_k\|_2} A \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{\alpha_1 x_1 + e_k}{\|\alpha_1 x_1 + e_k\|_2} \\ &= \frac{(\overline{\alpha_1} x_1^* + e_k^*)A(\alpha_1 x_1 + e_k)}{\|\alpha_1 x_1 + e_k\|_2^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(\overline{\alpha_1} x_1^*)A(\alpha_1 x_1)}{\|\alpha_1 x_1\|_2^2} = \lambda_1. \end{aligned}$$
ce qui permettera de conclure.

On a $z = P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ et $A^k = P\mathrm{diag}(\lambda_1^k, J_2^k, \dots, J_p^k)P^{-1}$. Donc
$$\begin{aligned} A^k z &= \sum_{i=1}^p (x_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1},\dots,x_{n_1+\ldots+n_i}) J_i^k \begin{pmatrix}\alpha_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}\\ \vdots \\ \alpha_{n_1+\ldots+n_i}\end{pmatrix} \\ A^k z &= \lambda_1^k \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^p (x_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1},\dots,x_{n_1+\ldots+n_i}) J_i^k \begin{pmatrix}\alpha_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}\\ \vdots \\ \alpha_{n_1+\ldots+n_i}\end{pmatrix} \\ A^k z &= \lambda_1^k \Big(\alpha_1 x_1 + e_k\Big). \end{aligned}$$

Il reste enfin à montrer que e_k tend bien vers 0. Il suffit pour cela d'écrire $J_i^k = \lambda_i^k I_{n_i}$ sur les parties diagonales et
$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{n_i-2}\lambda_i^{k-n_i+2} \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ & 0 & & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{j-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$
pour $k > n$. Comme $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, on a
$$\binom{k}{m}\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
pour $m \in [\![1,n]\!]$, ce qui permet de conclure.

$\square$

Remarque

- On utilise la propriété de la distance d_P suivante pour $u, v \in \mathbb{C}^n$ non nuls
$$d_P(u,v)^2 = 1 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|u\|_2^2\|v\|_2^2}.$$
En effet, le minimum qui définit d_P est atteint lorsque λv est la projection orthogonale de u sur la droite $\mathbb{C}v$. On a donc $\langle u - \lambda v, v\rangle = 0$ d'où
$$\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|_2^2}.$$
Ainsi
$$d_P(u,v)^2 = \frac{\left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|_2^2}v\right\|_2}{\|u\|_2^2} = 1 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|u\|_2^2\|v\|_2^2}.$$
- L'algorithme ne nécessite pas de stockage de la matrice, mais seulement de vecteurs colonnes, ce qui est pratique lorsque notre matrice A est très grande. On peut savoir calculer simplement l'image d'un vecteur mais avoir du mal à accéder à stocker la matrice entière.