# Méthode de Laplace

**Théorème .** Soient $I = ]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi \in C^2(I,\mathbb{R})$ tels que

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \displaystyle\int_a^b |f(x)| e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x < \infty$
- $\varphi'(x) = 0 \iff x = x_0$
- $\varphi''(x_0) > 0$
- $f(x_0) \neq 0$

Alors
$$F(t) := \int_a^b f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}} f(x_0) e^{-t\varphi(x_0)}.$$

**Preuve :**
On commence par traiter le cas $\varphi(x) = x^2$. Soit $\eta > 0$. On a
$$F(t) = \int_{|x|\leq\eta} f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\eta} f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x = F_1(t) + F_2(t)$$
Tout d'abord on effecture le changement de variable $u = \sqrt{t}x$
$$F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-tx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) e^{-u^2} \mathrm{d}u$$
où $h(x) = \mathbb{1}_{[-\eta,\eta]}(x) f(x)$ est bornée. Par le théorème de convergence dominée,
$$F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} h(0)\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$
De plus, pour $t \geq 1$ on a
$$|F_2(t)| \leq \int_{|x|\geq\eta} |f(x)| e^{-x^2} e^{(1-t)x^2} \mathrm{d}x \leq e^{(1-t)\eta^2} \int_{|x|\geq\eta} |f(x)| e^{-x^2} \mathrm{d}x \leq M e^{(1-t)\eta^2}.$$
Donc
$$\left|\frac{F_2(t)}{F_1(t)}\right| \leq \frac{M e^{(1-t)\eta^2}}{|F_1(t)|} \underset{t\to+\infty}{\sim} M\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{(1-t)\eta^2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On a donc $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}$.

Dans le cas général, on effectue un changement de variable pour se ramener au $1^{\text{er}}$ cas. On a $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x$ donc on veut $\varphi(x) - \varphi(x_0) = u^2$, c'est-à-dire
$$u = \psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\varphi(x) - \varphi(x_0)} & \text{si } x > x_0 \\ -\sqrt{\varphi(x) - \varphi(x_0)} & \text{si } x < x_0 \end{cases}.$$
Alors
$$F(t) = \int_\alpha^\beta f\Big(\psi^{-1}(u)\Big) e^{-tu^2} e^{-t\varphi(x_0)} \frac{\mathrm{d}u}{\psi'\Big(\psi^{-1}(u)\Big)},$$

avec $\alpha$ la limite de $\psi$ en $a$ et $\beta$ la limite de $\psi$ en $b$. Or

$$\frac{1}{\psi'(x)} = \frac{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(x_0)}}{\varphi'(x)} \underset{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}{\sim} \frac{2\sqrt{\frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}{\varphi''(x_0)(x-x_0)} = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(x_0)}}.$$

Donc $h(u) = \dfrac{f\left(\psi^{-1}(u)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(u)\right)}$ est continue sur $[\alpha,\beta]$. On peut alors conclure grâce au premier cas.

$\square$

**Application .**

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}.$$

En effet, on effecture le changement de variable $x = tu$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x = t^{t+1}\int_0^{+\infty} u^t e^{-tu}\mathrm{d}u = t^{t+1}\int_0^{+\infty} e^{\ln(u)-tu}\mathrm{d}u.$$

On applique alors la méthode de Laplace avec $\varphi(u) = tu - \ln(u)$. On a $\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$ donc l'unique point critique de $\varphi$ est 1. De plus $\varphi''(1) = 1$ donc c'est bien un minimum. On en déduit

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to\infty}{\sim} t^{t+1}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-t} = t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}.$$