Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$

Théorème . Soit $d \geq 3$. On définit une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ issue de 0 par

$$\left| \begin{array}{ccc} X_0 & = & 0 \\ X_{n+1} & = & X_n + \xi_n \end{array} \right. ,$$

avec les $(\xi_n)_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ suivant la loi uniforme sur $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$ où $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\mathbb{P}\Big(\|X_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\Big) = 1.$$

Preuve :
Tout d'abord, on a

$$\varphi(t) = \varphi_{\xi_n}(t_1, \ldots, t_d) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} \left(e^{it_k} + e^{-it_k}\right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(t_k).$$

Par indépendance des ξ_n, on a alors

$$\varphi_{X_n}(t) = \big(\varphi(t)\big)^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X_n = k) e^{ikt}.$$

Comme une probabilité est de masse 1, on a

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d := [-\pi,\pi]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{P}(X_n = k) e^{itk}| \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} 1 \mathrm{d}t = 1.$$

On peut alors appliquer le théorème de Fubini

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \varphi_{X_n}(t) \mathrm{d}t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{\mathbb{P}(X_n = k)}{(2\pi)^d} \int_{T^d} e^{itk} \mathrm{d}t \right) = \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Le théorème de Fubini-Tonelli nous donne :

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \varphi(t)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{\mathrm{d}t}{1 - \varphi(t)^2},$$

car $\varphi(t)^2 \geq 0$ et $|\varphi(t)| < 1$ presque partout.

$$\big(\varphi(t) = 1\big) \iff \big(t = 0 \text{ ou } t = (\pm\pi, \ldots, \pm\pi)\big)$$

φ étant continue sur $T^d \backslash \{0, (\pm\pi, \ldots, \pm\pi)\}$ et comme $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$, il suffit d'étudier l'intégrabilité au voisinage de 0. On fait alors un développement limité en 0

$$\varphi(t) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \left(1 - \frac{t_k^2}{2} + o\big(t_k^2\big)\right) = 1 - \frac{\|t\|_2^2}{2d} + o\big(\|t\|_2^2\big).$$

Ainsi, on a $\varphi(t)^2 = 1 - \frac{\|t\|_2^2}{d} + o(\|t\|_2^2)$ et finalement $\frac{1}{1-\varphi(t)^2} \sim \frac{d}{\|t\|_2^2}$, intégrable en 0 car $2 < d$. Comme $X_0 = 0$, il faut un nombre pair de pas pour revenir en 0, ainsi $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = 0$. Donc

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n = 0) < \infty.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on pose $N_k := \Big|\{n \geq 0 | X_n = k\}\Big| = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{X_n = k}$. Par le lemme de Borel-Cantelli, N_0 est fini presque sûrement.

Soit $k \in \mathbb{Z}^d$ et on pose $l = \sum_{i=1}^{d} |k_j|$ le nombre de pas nécessaire pour aller de 0 à k. Ainsi, $\mathbb{P}(X_l = -k) > 0$ et pour $n \geq l$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &\geq \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } X_{n-l} = k) \geq \mathbb{P}(X_{n-l} = k \text{ et } \xi_{n-l+1} + \ldots + \xi_n = -k) \\ &\geq \mathbb{P}(X_{n-l} = k)\mathbb{P}(X_l = -k) \quad \text{par indépendance des } (\xi_n)_n. \end{aligned}$$

On somme alors pour $n \geq l$

$$\sum_{n \geq l} \mathbb{P}(X_{n-l} = k) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X_l = -k)} \sum_{n \geq l} \mathbb{P}(X_n = 0) < \infty.$$

Donc de même que N_k est fini presque sûrement.

On peut alors conclure

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\|X_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty\Big) &= \mathbb{P}\Big(\forall A \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|X_n\| \geq A\Big) \\ &= \lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|X_n\| \geq A\Big) \quad \text{par limite monotone} \\ &= \lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\forall k \in \mathbb{Z}^d, \|k\| \leq A \implies N_k \text{ fini}\Big) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□