Théorème de Lyapunov

Théorème . Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $f(0) = 0$. On considère

$$\left| \begin{array}{rcl} X'(t) & = & f\Big(X(t)\Big) \\ X(0) & = & X_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Si les parties réelles des valeurs propres de $A := D_0 f$ sont strictement négatives, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système, c'est-à-dire pour X_0 assez proche de 0, $X(t)$ tend exponentiellement vite vers 0.

Preuve :
On commence par considérer le linéarisé

$$\left| \begin{array}{rcl} Y'(t) & = & AY(t) \\ Y(0) & = & X_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. .$$

On a $Y(t) = e^{tA} X_0$. On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ munit d'une norme d'algèbre et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| = \|e^{tD} e^{tN}\| \leq \|e^{tD}\| \|\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k N^k}{k!}\| \\ \leq e^{t \sup\limits_{\lambda \in \mathsf{Sp}(D)} \{\mathsf{Re}(\lambda)\}} \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k \|N\|^k}{k!} \\ \leq M_0 e^{t\mathsf{Re}(\lambda_0)} (1 + |t|^n) \end{aligned}$$

avec λ_o tel que $\mathsf{Re}(\lambda_0) = \sup\limits_{\lambda \in \mathsf{Sp}(D)} \{\mathsf{Re}(\lambda)\}$. Pour $\mathsf{Re}(\lambda_0) < -a < 0$, on a

$$e^{t\mathsf{Re}(\lambda_0) + at} (1 + |t|^n) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\|Y(t)\| \leq M_1 e^{-at} \|X_0\|$, ce qui donne le résultat pour le linéarisé.

On a pour $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \left\langle e^{tA} x, e^{tA} y \right\rangle \right| \leq \left\| e^{tA} x \right\| \left\| e^{tA} y \right\| \leq M_1^2 e^{-2at} \|x\| \|y\|,$$

donc $b(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{tA} x, e^{tA} y \right\rangle \mathrm{d}t$ est bien définie. On définit alors un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, on note $q(\cdot)$ sa forme quadratique associée. On a

$$2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2 \left\langle e^{tA} x, e^{tA} Ax \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\| e^{tA} x \right\|^2 \mathrm{d}t = -\|x\|^2.$$

Soit (I, x) une solution maximale. On pose $r(x) = f(x) - Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} q(X)'(t) &= D_{X(t)}q\Big(X'(t)\Big) = 2b\Big(X(t), X'(t)\Big) \\ &= 2b\Big(X(t), AX(t)\Big) + 2b\Big(X(t), r(X(t))\Big) \\ &= -\|X(t)\|^2 + 2b\Big(X(t), r(X(t))\Big) \end{aligned}$$

Par l'équivalence des normes, il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|^2 \geq Cq(\cdot)$. De plus, pour $\varepsilon > 0$ fixé tel que $2\varepsilon < C$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \alpha \implies \sqrt{q(r(x))} \leq \varepsilon\sqrt{q(x)}$$

par définition de la différentiabilité. On choisit alors $\|X_0\| < \alpha$. Si $\|X(t_0)\| = \alpha$ pour un premier $t_0 > 0$, alors

$$q(X)'(t_0) = -\|X(t_0)\|^2 + 2b\Big(X(t_0), r(X(t_0))\Big) \leq -Cq\Big(X(t_0)\Big) + 2\sqrt{q(X(t_0))}\sqrt{q\Big(r(X(t_0))\Big)}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc finalement

$$q(X)'(t_0) \leq \Big(-C + 2\varepsilon\Big)q\Big(X(t_0)\Big) < 0.$$

Donc $\|X(t)\| > \|X(t_0)\| = \alpha$ absurde.
Donc

$$\forall t \in I^+, \quad q(X)'(t) \leq \Big(2\varepsilon - C\Big)q\Big(X(t)\Big).$$

Par le lemme de Gronwall,

$$\forall t \in I^+, \quad q\Big(X(t)\Big) \leq e^{(2\varepsilon - C)t}q(X_0)$$

ce qui permet de conclure. En particulier, $I^+ = \mathbb{R}^+$.

$\square$