Théorème de Littlewood

Lemme . Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors

$$(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n P(x^n) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve :
Par linéarité de la propriété, on n'étudie que le cas des monômes X^k, avec $k \in \mathbb{N}$.

$$(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n x^{nk} = (1-x)\sum_{n\geq 0}\left(x^{k+1}\right)^n = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{\frac{1-x^{k+1}}{1-x}} = \frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^k}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\sum_{n\geq 0} x^n x^{nk} = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure.

$\square$

Théorème . Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe. On suppose que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est définie pour tout $x \in [0,1[$, que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0$, et que $a_n = \underset{n}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum (a_n)_{n\geq 0}$ converge et sa somme vaut 0.

Preuve :
On pose

$$\Phi := \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \forall x \in [0,1[, \sum_{n\geq 0} a_n \varphi(x^n) \text{ converge et } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n\geq 0} a_n \varphi(x^n) = 0 \right\}$$

et

$$N_x := \left\lfloor -\frac{\log(2)}{\log(x)} \right\rfloor \quad \text{pour } x \in]0,1[.$$

On a pour $x \in [0,1[$

$$\sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n \quad \text{et} \quad N_x \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer le théorème revient donc à montrer que $g := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} \in \Phi$. On commence par montrer que $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$. Par linéarité, il suffit de considérer les monômes. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $x < 1$, on a $x^k < 1$ donc

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn} = f(x^k) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat.

On va approcher g par des polynômes nuls en 0. Pour cela, on définit h par $\forall x \in]0,1[,\ g(x) = x + x(1-x)h(x),$. Donc

$$h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver deux fonctions h_1 et h_2 continues sur $[0,1]$ telles que $h_1 \leq h \leq h_2$ et $\displaystyle\int_0^1 (h_2 - h_1) < \varepsilon$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe deux polynmes S_1 et S_2 tels que $\|S_i - h_i\|_\infty < \varepsilon$ pour $i \in \{1,2\}$. On pose alors $T_1 = S_1 - \varepsilon$ et $T_2 = S_2 + \varepsilon$, ce qui nous permet de garder l'inégalité $T_1 \leq h \leq T_2$. De plus,

$$\int_0^1 (T_2 - T_1) = \int_0^1 (S_2 - S_1) + 2\varepsilon = \int_0^1 (S_2 - h_2 + h_2 - h_1 + h_1 - S_1) + \varepsilon \leq 5\varepsilon.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x + x(1-x)T_1(x), \\ P_2(x) &= x + x(1-x)T_2(x), \\ Q(x) = T_2(x) - T_1(x) &= \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

On a donc $P_1(0) = P_2(0) = 0$ donc $P_1, P_2 \in \Phi$ et $P_1 \leq g \leq P_2$.

Nous allons maintenant montrer que $g \in \Phi$ grâce à cette approximation polynomiale. Par hypothèse, on sait qu'il existe $L > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, n|a_n| \leq L$. Soit $x \in [0,1[$.

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| (P_2 - P_1)(x^n) \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| x^n (1-x^n) Q(x^n).$$

Or comme $0 \leq x < 1$, on a

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) \leq n(1-x).$$

Donc

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| n(1-x) x^n Q(x^n) \leq L(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \right| + L(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n).$$

Le premier terme tend vers 0 car $P_1 \in \Phi$. Le deuxième terme tend vers $\int_0^1 Q \leq 5\varepsilon$ par le lemme. On conclut en faisant tendre ε vers 0.

□