Isométries du cube et du tétraèdre

Théorème . Soient C un cube et T un tétraèdre. Alors les groupes d'isométrie de T sont

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq S_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Isom}^+(T) \simeq A_4,$$

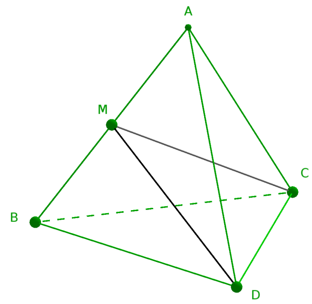
et ceux de C sont

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{Isom}^+(C) \simeq S_4,$$

Preuve :
On commence par considérer le tétraèdre. Comme une isométrie conserve les longueurs, l'ensemble des sommes $S = \{A,B,C,D\}$ est stable par $\mathsf{Isom}(T)$. On peut donc faire agir $\mathsf{Isom}(T)$ sur S via

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathsf{Isom}(T) & \to & S_4 \\ g & \mapsto & g|_S \end{array}.$$

Tout d'abord, φ est injective, car si g laisse S fixe, alors elle fixe stable le repère affinie $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et ainsi $g = \mathsf{Id}$. Pour montrer que φ est surjective, il suffit de montrer que les permutations sont dans l'image de φ car elles engendrent S_4. C'est le cas, par exemple la réflexion par rapport au plan (MDC), où M est le milieu du segment $[AB]$, réalise la transposition (AB). Ainsi, φ est bijective et

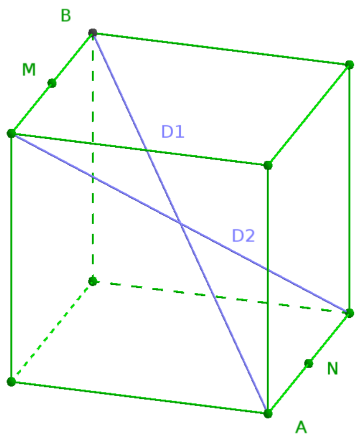


$$\mathsf{Isom}(T) \simeq S_4.$$

De plus, $\det \circ \varphi^{-1}$ est un morphisme non trivial de S_4 dans $\{-1,1\}$, donc $\det = \varepsilon \circ \varphi$. En particulier,

$$\mathsf{Isom}^+(T) = \mathsf{Ker}(\det) \simeq \mathsf{Ker}(\varepsilon) = A_4.$$

Pour le cube, on considère les grandes diagonales. Comme une isométrie conserve les longueurs, l'ensemble des grandes diagonales est stable. On peut donc faire agir $\mathsf{Isom}(C)$ sur cet ensemble, ce qui donne un morphisme $\varphi : \mathsf{Isom}(C) \to S_4$.



Soient $f \in \mathsf{Ker}(\varphi)$ et (AB) une grande diagonale. Si $f(A) = B$, alors f doit aussi échanger les extrêmités des autres grandes diagonales car elle conserve les distances. On en déduit que f est la symétrie de centre le centre du cube et ainsi

$$\mathsf{Ker}(\varphi) = \{\mathsf{Id}, s\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

De plus, φ est surjective car on peut réaliser toutes les permutations. Par exemple, on obtient la permutation $(D_1 D_2)$ avec le retournement d'axe (MN). Donc

$$\mathsf{Isom}(C)/\{\mathsf{Id}, s\} \simeq \mathsf{Isom}^+(C) \simeq S_4.$$

Pour le deuxième isomorphisme, on a $\{\mathsf{Id}, s\} \lhd S_4$, $\mathsf{Isom}^+(C) \lhd S_4$ et $2|\mathsf{Isom}^+(C)| = |\mathsf{Isom}(C)|$ donc

$$\mathsf{Isom}(C) \simeq \mathsf{Isom}^+(C) \times \{\mathsf{Id}, s\} \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\square$