Formule d'inversion de la fonction caractéristique

Théorème . La fonction caractéristique d'une loi de probabilité détermine cette loi, ainsi deux variables ont même loi si et seulement si elles ont même fonction caractéristique. De plus, si X est une variable aléatoire discrète, on a

$$\mathbb{P}(X=n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-int}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

Si X est une variable aléatoire réelle et que $\varphi_X\in L^1$, alors X admet une densité donnée par

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-ixt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque On utilise dans la preuve le même raisonnement que pour prouver que la fonction de répartition caractérise la loi. Ce résultat peut faire appel au lemme de Dynkin sur les classes monotones ou se faire par une preuve directe selon le contexte. Il s'agit de l'unicité d'une mesure quand on la connait sur une partie stable par intersections qui engendre la tribu, dans notre cas les intervalles qui engendrent les boréliens. Il n'est pas important de détailler ce point lors du développement mais il est bien sûr nécessaire d'avoir conscience que ce raisonnement est nécéssaire.

Preuve :
On introduit pour $T>0$ et $a<b$ la fonction K_T définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}, K_T(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{ixt}\mathrm{d}t.$$

Si on note $\varphi(y)=\displaystyle\int_0^y\frac{sin(u)}{u}\mathrm{d}u$, alors on a $K_T(x)=\dfrac{1}{\pi}\Big[\varphi\Big(T(x-a)\Big)-\varphi\Big(T(x-b)\Big)\Big]$. En effet, on a

$$\begin{aligned}K_T(x)&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}\mathrm{d}t-\int_0^T\frac{e^{iat}-e^{ibt}}{it}e^{-itx}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it}\mathrm{d}t-\int_0^T\frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{\pi}(\varphi(T(x-a))-\varphi(T(x-b))).\end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^\infty\frac{sin(u)}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$, ainsi on a $\displaystyle\lim_{T\to\infty}K_T(x)=\chi_{]a,b[}+\frac{\delta_a+\delta_b}{2}$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}K_T\mathrm{d}P_X&=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P_X(x)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{ixt}\mathrm{d}P_X(x)\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a alors par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{T\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} K_T(d)\mathrm{d}P_X(x)\right) = \mathbb{P}\Big(X \in]a,b[\Big) + \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

car K_T est majorée par une constante, φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et ayant une limite finie à l'infini, l'hypothèse de domination est vérifiée. Or $F_X(b)-F_X(a) = P_X(]a,b[)+\mathbb{P}(X=b)$, on en déduit

$$F_X(b)-F_X(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\mathrm{d}t - \frac{\mathbb{P}(X=a)-\mathbb{P}(X=b)}{2}.$$

Les atomes de X sont exactement les points de discontinuité de F_X, et F_X étant croissante, leur ensemble $\mathscr{D}$ est dénombrable. On se place avec $b\notin\mathscr{D}$ et on prend la limite $a\to-\infty$, avec $a\notin\mathscr{D}$.

$$F_X(b) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ a\notin\mathscr{D}}}\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

Comme F_X est continue à droite, elle est uniquement déterminée par ses valeurs sur $\mathbb{R}\backslash\mathscr{D}$. Donc φ_X caractérise la loi de X.

On considère maintenant $J_T(x) := \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} e^{-ibt}e^{ixt}\mathrm{d}t$. Ainsi, on a $J_T(b)=1$ et si $x\neq b$, on a

$$J_T(x) = \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{i(x-b)t}}{i(x-b)}\right]_{-T}^{T} = \frac{\sin(T(x-b))}{T(x-b)}.$$

Ainsi, J_T converge simplement vers δ_b. D'après le théorème de Fubini on a

$$\int_{\mathbb{R}} J_T(x)\mathrm{d}P_X(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}e^{ixt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P_X = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

De même, $\forall T\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}, |J_T(x)|\leq 1$, donc par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{T\to\infty} J_T(x)\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(X=b).$$

On a alors caractérisé les atomes, d'où le résultat pour une variable discrète.
On suppose maintenant $\varphi_X\in L^1$. Alors la loi n'admet pas d'atome car

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_X(t)e^{-ibt}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2T}\|\varphi_X\|_1 \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi on a $\mathbb{P}_X\Big(]a,b[\Big) = \lim_{T\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\mathrm{d}t$. Par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_a^b e^{-ixt}\mathrm{d}x\right)\varphi_X(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-ixt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi, en introduisant $g_T(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T} e^{-ixt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t$, on a

$$\mathbb{P}_X(]a,b[) = \lim_{T\to\infty}\int_a^b g_T(x)\mathrm{d}x.$$

Comme $|g_T(x)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}|\varphi_X(t)|\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|\varphi_X(t)|\mathrm{d}t$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{P}_X(]a,b[) = \int_a^b \lim_{T\to\infty} g_T(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

□

Remarque

- On a $\varphi_X \in L^1$ implique X a densité mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, si X a comme densité $f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$, alors

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1} + i\frac{t}{t^2+1},$$

  ainsi $|\varphi_X(t)| \sim \frac{1}{|t|}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Le calcul de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ n'a rien d'évident mais ne pose pas de problème si on l'aborde avec la bonne idée. Il suffit de considérer la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

  On peut alors trouver une expression simple de F' sur $]0,+\infty[$ et conclure en intégrant et en prenant la limite de F en 0. Il faut cependant prendre soin à bien justifier la continuité de F en 0. On peut aussi utiliser l'analyse complexe pour calculer cette intégrale.