Homéomorphisme par l'exponentielle

Théorème . L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et entre $H_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Preuve :
Pour commencer, montrons que $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est bien définie. Soit A une matrice hermitienne. D'après le théorème spectral, il existe $U \in U(n)$ telle que

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Alors

$$\exp(A) = U^* \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} U \in H_n^{++}(\mathbb{C}).$$

Soit maintenant $B \in H_n^{++}(\mathbb{C})$. De même, il existe $U \in U(n)$ telle que

$$B = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Alors la matrice définie par $A = U^* \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} U$ est hermitienne et vérifie $\exp(A) = B$. Donc $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est bien définie et surjective.

Réciproquement, soient A_1 et A_2 deux matrices hermitiennes telles que $\exp(A_1) = \exp(A_2)$. Comme $\mathbb{C}[A_1]$ est fermé, $\exp(A_1) \in \mathbb{C}[A_1]$. Donc A_1 et $\exp(A_2) = \exp(A_1)$ commutent. De plus, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$A_2 = P\Big(\exp(A_2)\Big).$$

En effet, on diagonalise A_2, il suffit alors de construire un polynôme P tel que $P(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$, par exemple à l'aide de l'interpolation de Lagrange. On en déduit que A_1 et A_2 commutent et sont donc codiagonalisables. L'exponentielle étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $A_1 = A_2$. Donc $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est bijective.

L'exponentielle est continue, il reste à montrer que son inverse est continue. Soit $(B_p)_{p \geq 0}$ une sutie de $H_n^{++}(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in H_n^{++}(\mathbb{C})$. On munit ici $H_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| := \sqrt{\rho(A^*A)}$. On note $(A_p)_p$ et A telle que $\exp(A_p) = B_p$ et $\exp(A) = B$. On utilise maitenant le fait que pour une matrice hermitienne, $\|A\| = \sup_i\{|\lambda_i|\}$. Comme la suite $(B_p)_p$ converge, elle est bornée, donc

$$\exists M_1 > 0, \forall p \geq 0, \quad \mathrm{Sp}(B_p) \subset [0, M_1].$$

Par continuité de l'inverse sur $H_n^{++}(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$, $(B_p^{-1})_p$ converge vers B^{-1} dans $H_n^{++}(\mathbb{C})$. De même, la suite est bornée donc

$$\exists M_0 > 0, \forall p \geq 0, \quad \mathsf{Sp}(B_p) \subset [M_0, M_1] \subset]0, \infty[.$$

Par croissance du logarithme sur $]0,\infty[$, on en déduit que

$$\forall p \geq 0, \quad \mathsf{Sp}(A_p) \subset \Big[\ln(M_0), \ln(M_1)\Big].$$

En particulier, la suite $(A_p)_p$ est bornée dans $H_n(\mathbb{C})$. Or son unique valeur d'adhérence est A. En effet, si $(A_{\varphi(p)})_p$ converge vers $\tilde{A} \in H_n(\mathbb{C})$, $H_n(\mathbb{C})$ étant fermé, alors par continuité on a $\exp(A) = \exp(\tilde{A})$, l'injectivité de exp sur $H_n(\mathbb{C})$ permet de conclure. Donc $(A_p)_p$ est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers A.

□