Théorème de Hahn-Banach

Théorème . Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normée séparable. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Toute forme linéaire continue f sur F est prolongeable en une forme linéaire continue $g \in E'$ telle que

$$\|f\| = \|g\|.$$

Preuve :
On commence par traiter le cas où F est un hyperplan. Soit $x_0 \in E \backslash F$.
Pour $h \in F$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(h+tx_0) = g(h)+tg(x_0) = f(h)+ta.$$

Il faut trouver $a = g(x_0)$ tel que $\|f\| = \|g\|$. Quitte à considérer $\frac{1}{\|f\|}$, on peut supposer $\|f\| = 1$.
Il faut alors pour $h \in F$ et $t > 0$

$$\begin{cases} f(h)+ta & \leq & \|h+tx_0\| \\ f(h)-ta & \leq & \|h+tx_0\| \end{cases}$$

donc

$$f\left(\frac{h_0}{t_0}\right) - \left\|\frac{h_0}{t_0} - x_0\right\| \leq a \leq \left\|x_0 + \frac{h_1}{t_1}\right\| + f\left(\frac{h_1}{t_1}\right)$$

avec $h_0, h_1 \in F$ et $t_0, t_1 > 0$. Pour qu'un tel a existe, il faut que pour tout $z, y \in F$

$$f(y) - \|y - x_0\| \leq \|x_0 + z\| - f(z), \text{ c'est à dire } f(y+z) \leq \|x_0+z\| + \|y-x_0\|.$$

Or $f(y+z) \leq \|y+z\| \leq \|x_0+z\| + \|y-x_0\|$ donc il existe un tel a et on a

$$\forall x \in E, \quad g(x) \leq \|x\|.$$

Or $g|_F = f$ et $\|f\| = 1$ donc $\|g\| = 1$.

Dans le cas général, on considère une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans E. On définit par récurrence f_n par

$$\left|\begin{array}{c} f_0 = f \\ f_{n+1} \text{ le prolongement de } f_n \text{ à Vect}(F, e_1, \ldots, e_n) \end{array}\right.$$

Comme $\|f_{n+1}\| = \|f_n\|$ par ce qui précéde, on a $\|f_n\| = \|f\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f_n(x)$ pour $x \in \text{Vect}(F, e_1, \ldots, e_n)$. Elle est bien définie sur E car on définit ainsi une forme linéaire sur une partie dense de E. De plus pour $x \in E$ on a

$$|f_n(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

donc par passage à la limite, $\|g\| \leq \|f\|$. Or $g|_F = f_0 = f$ donc $\|g\| = \|f\|$.

$\square$

Corollaire . E s'injecte canoniquement dans son bidual via l'isométrie

$$J : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & \big(f \mapsto f(x)\big) \end{array} \right.$$

Preuve :
Soit $x \in E$. On commence par montre que

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

On a immédiatement $\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|$. D'arpès le théorème de Hahn-Banach avec $F = \mathbb{R}x$ et $f(tx) = t\|x\|^2$, il existe $g \in E'$ tel que $\|g\| = \|x\|$ et $g(tx) = t\|x\|^2$. Alors

$$\|x\| = \left| \left(\frac{1}{\|x\|} g \right)(x) \right| \leq \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|,$$

d'où l'égalité annoncée. Enfin, on a

$$\|Jx\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |Jx(f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|$$

où la première égalité est par définition.

□

Remarque Le théorème de Hahn-Banach reste vrai dans un cas non séparable mais l'axiome du choix et nécéssaire pour la preuve, et donc le corollaire aussi. Que ce soit en dimension finie, séparable ou non, l'étape pour passer d'un hyperplan à l'espace total est la même. Ce qui change, c'est l'étape pour conclure. En dimension finie, c'est une récurrence sur la dimension et dans le cas non séparable il faut utiliser l'axiome du choix.