Formule de Cauchy et un calcul d'intégrale

Théorème . Soit $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $D(z_0, R)\setminus\{z_0\}$. Alors

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n,$$

avec $a_n := \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\omega$ pour tout $0 < r < R$.
Si de plus, f est continue en z_0, alors $a_n = 0$ pour $n < 0$.

Preuve :
Par translation, on se ramène à $z_0 = 0$. Soit $0 < r < R$, On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(t) := f(re^{it}).$$

g est 2π-périodique, continue de classe C^1 par morceaux. Il y a donc convergence uniforme de sa série de Fourier vers g

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(r)e^{-int},$$

avec $a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t$. On utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale

$$\left|\partial_r\left[f(re^{it})e^{-int}\right]\right| = \left|e^{it}f'(re^{it})e^{-int}\right| \leq M,$$

donc on peut intervertir dérivation et intégrale. Ainsi on a

$$\begin{aligned} a_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}f'(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi ri}\int_0^{2\pi}\partial_t[f(re^{it})]e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{n}{r}a_n(r). \end{aligned}$$

On a trouvé une équation différentielle vérifié par $a_n(\cdot)$, qui peut se réécrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a_n(r)r^{-n}\right) = 0.$$

Ainsi, il existe une constante a_n telle que $\forall 0 < r < R,\ a_n(r) = a_n r^n$. En reprenant la formule initiale, on a

$$f(z) = f(re^{it}) = g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Pour trouver la formule annoncée, il suffit d'écrire l'inégalité $a_n r^n = a_n(r)$.

$$a_n = \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}ire^{it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}\mathrm{d}\omega.$$

Si on suppose de plus f continue en 0, alors f est bornée au voisinage de 0 par une constante

$L > 0$. On a alors pour $n < 0$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}} \mathrm{d}\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,r)} \frac{L}{r^n} \mathrm{d}t \leq \frac{L}{r^n} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui permet de conclure.

□

> **Remarque** On prend ici comme définition d'une fonction holomorphe celle d'une fonction de variable complexe dérivable au sens complexe, **de dérivée continue**. Tous les résultats que l'on énonce reste vraie sans l'hypothèse C^1, car on peut montrer que dérivable au sens complexe implique C^1, mais cela facilite grandement la preuve. Cette preuve n'est pas pour autant sans valeur, car pour cette hypothèse on peut prouver facilement des résultats profonds. On illuste aussi bien la puissance de la théorie de Fourier que la force du caractère holomorphe. On démontre la formule du développement en série de laurent d'une fonction méromorphe autour d'une singularité, l'analycité et la classe C^∞ des fonctions holomorphes, et la formule de Cauchy.

Proposition $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}$.

Preuve :
Tout d'abord, $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$ est intégrable. En effet, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(x)}{1+x^2} \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.
Soit $R > 1$. On pose $\displaystyle I_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z$ avec $\Gamma_R := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = R \text{ et } Im(z) \geq 0 \right\} \bigcup [-R, R]$.
On décompose ensuite Γ_R comme $\Gamma_R = \Gamma_+ \bigcup \Gamma_-$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_R = \int_{\Gamma_+} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z + \int_{\Gamma_-} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z &= \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i} \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z-i} \mathrm{d}z - \frac{1}{2i} \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z+i} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-i|=1} \frac{\pi e^{iz}}{z-i} \mathrm{d}z - \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-i|=1} \frac{\frac{\pi(z-i)e^{iz}}{z+i}}{z-i} \mathrm{d}z \\ &= \pi e^{i^2} - 0 = \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{1+R^2 e^{2it}} Rie^{it} \mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\left| \frac{Re^{iRe^{it}}}{1+R^2e^{2it}} ie^{it} \right| \leq \frac{R}{R^2-1} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit en faisant tendre R vers l'infini que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}.$$

□