Théorème de Fejér

Théorème . Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On considère la somme partielle d'indice n de sa série de Fourier $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, où pour tout $k\in\mathbb{N}$, $e_k(t)=e^{ikt}$ sont les fonctions trigonométriques. Alors la suite $(S_n(f))_n$ converge au sens de Césaro en norme infini vers f, c'est-à-dire si $\sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$, alors

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $f\in L^p$, alors $\|\sigma_n(f)-f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Preuve :
On a

$$\langle f,e_k\rangle e_k(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\mathrm{d}t = (f*e_k)(x).$$

Donc

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}(f,e_k)e_k = \sum_{k=-n}^{n} f*e_k = f*\sum_{k=-n}^{n} e_k = f*D_n,$$

avec D_n le noyau de Dirichlet. On a alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1$ et pour $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{-inx}\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}.2i\sin((n+\frac{1}{2})x)}{e^{-i\frac{x}{2}}.2i\sin(\frac{x}{2})},$$

donc

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Pour étudier $\sigma_n(f)$, on introduit le noyau de Fejér $K_n = \frac{D_0+\ldots+D_{n-1}}{n}$. On a alors

- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t = 1.$
- $\sigma_n(f) = f*K_n$ pour $n\geq 1$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\quad K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \geq 0.$

Les deux premiers points sont évidents, et le dernier s'obtient par un calcul similaire à D_n. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} nK_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x}\right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{sin(n\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})^2}Im(e^{in\frac{x}{2}}) = \left(\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2. \end{aligned}$$

On va maintenant prouver la convergence. On introduit $\omega(\eta) = \sup_{|u-v|\leq\eta} |f(u)-f(v)|$ pour $\eta > 0$. Comme f est continue sur le compact $[0,2\pi]$ et 2π-périodique, elle est est uniformément continue

$$\omega(\eta) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_n(f)(x)| &= \left|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t\right) f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\Big|f(x)-f(x-t)\Big|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\eta} K_n(t)|f(x)-f(x-t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta\leq|t|\leq\pi} K_n(t)|f(x)-f(x-t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \omega(\eta) + \frac{\|f\|_\infty}{n\pi}\int_{\eta\leq|t|\leq\pi}\left(\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&\leq \omega(\eta) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin(\frac{\eta}{2})^2}
\end{aligned}$$

On a une majoration qui ne dépend pas de x, ce qui nous permet de passer en norme infinie

$$\|f-\sigma_n(f)\|_\infty \leq \omega(\eta) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin(\frac{\eta}{2})^2}.$$

Donc $\limsup_{n\to\infty} \|f-\sigma_n(f)\|_\infty \leq \omega(\eta)$. En faisant tendre η vers 0, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f-\sigma_n(f)\|_\infty = 0.$$

On cherche maintenant à établir le résultat pour $f \in L^p$. Tout d'abord, en considérant la mesure de probabilité de densité $K_n(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$, on peut utiliser l'inégalité de Holder

$$|\sigma_n(f,x)|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_n(t)\mathrm{d}t.$$

On intègre ensuite sur $[-\pi,\pi]$ et on applique le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \|K_n\|_1\|f\|_p^p = \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\sigma_n(f) \in L^p$ et $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$. Un calcul similaire donne

$$\begin{aligned}
\|f-\sigma_n(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|^p\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)g(-t)\mathrm{d}t = \sigma_n(g,0),
\end{aligned}$$

avec $g(t) = \|f-\tau_t f\|_p^p$. Or on peut montrer en raisonnant par densité que g est continue, donc $\sigma_n(g,0) \underset{n\to\infty}{\to} g(0) = 0$ ce qui permet de conclure.

□