Estimateur du maximum de vraisemblance d'une loi uniforme

Théorème . On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes indentiquement distribués de loi $\mathscr{U}(\theta)$ avec $\theta > 0$. Alors le maximum de vraisemblance $\widehat{\theta_n}$ existe et vaut $\widehat{\theta_n} = \max_i \{X_i\}$.

(i) On a $\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta_n}] = \dfrac{n}{n+1}\theta$. L'estimateur est donc biaisé, mais asymptotiquement sans biais.

(ii) L'estimateur est fortement consistant.

(iii) On a $n(\widehat{\theta_n} - \theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, la vitesse de convergence est $\dfrac{1}{n}$.

(iv) Le risque quadratique est $\mathbb{E}_\theta\left[(\widehat{\theta_n} - \theta)^2\right] = \dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

Preuve :
Le modèle statistique est $(\mathbb{R}^n, \mathscr{U}(\theta)^{\otimes n})$. Il est dominée par la mesure de Lebesgue. La vraisemblance est

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{x_i \le \theta} = \mathbb{1}_{\max_i\{X_i\} \le \theta}\theta^{-n}.$$

Comme la fonction $\theta \mapsto \theta^{-n}$ est décroissante, on a existence du maximum de vraisemblance, et il vaut $\widehat{\theta_n} = \max_i\{X_i\}$. On va alors trouver sa loi. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\mathbb{P}_\theta\left(\widehat{\theta_n} \le t\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\forall i \in [\![1,n]\!], X_i \le t\right) = \mathbb{P}_\theta\left(X_1 \le t\right)^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{t<\theta} + \mathbb{1}_{t \le \theta}.$$

Comme cette fonction de t est dérivable, on en déduit que $\widehat{\theta_n}$ est à densité, de densité

$$f_n(t) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(t).$$

On peut alors calculer le biais.

$$\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta_n}] = \int_{\mathbb{R}} t f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Montrons alors la forte consistance de l'estimateur, via le lemme de Borel-Cantelli. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}_\theta\left(|\widehat{\theta_n} - \theta| \ge \varepsilon\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\widehat{\theta_n} \le \theta - \varepsilon \text{ ou } \widehat{\theta_n} \ge \theta + \varepsilon\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\widehat{\theta_n} \le \theta - \varepsilon\right) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n,$$

car $\widehat{\theta_n}$ est à valeur dans $[0,\theta]$. Ainsi, pour ε suffisamment petit, la série $\Sigma\left(\mathbb{P}_\theta(|\widehat{\theta_n} - \theta| \ge \varepsilon)\right)_n$ est convergente. Ainsi, le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que $\widehat{\theta_n}$ converge $\mathbb{P}_\theta$-presque sûrement vers θ.

Étudions maintenant la vitesse de cette convergence. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$ et soit $n \geq \frac{t}{\theta}$. On a

$$\mathbb{P}_\theta\Big(n(\theta - \widehat{\theta_n}) \geq t\Big) = \mathbb{P}_\theta\Big(\widehat{\theta_n} \leq \theta - \frac{t}{n}\Big) = \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t}{\theta}}.$$

Donc $\mathbb{P}_\theta\Big(n|\theta - \widehat{\theta_n}|\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$. On a bien une vitesse de convergence en $\frac{1}{n}$, car $n(\widehat{\theta_n} - \theta)$ convergence en loi pour $\mathbb{P}_\theta$ vers $\mathscr{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

Pour finir, on calcule le risque quadratique.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left[(\widehat{\theta_n} - \theta)^2\right] &= \mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}^2\right] - 2\theta\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right] + \theta^2 = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1}\mathrm{d}t - \frac{2n\theta^2}{n+1} + \theta^2 \\ &= \left(\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1\right)\theta^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

□

Application . On peut utiliser la vitesse de convergence pour trouver un intervalle de confiance asymptotique. On sait que $n(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$, donc pour $\alpha \in]0,1[$

$$\mathbb{P}_\theta\Big(n|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_\theta(X \geq \varepsilon),$$

où $X \sim \mathscr{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$. On en déduit que pour $t_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ on a pour n grand

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta \in \left[\widehat{\theta}_n - \frac{t_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right)}{n}, \widehat{\theta}_n + \frac{t_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right)}{n}\right]\right) = \mathbb{P}_\theta\Big(n|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq t_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right)\Big) \simeq 1 - \alpha.$$

Le problème est que pour trouver $t_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right)$, il faut connaitre la valeur que le veut estimer θ. On peut cependant montrer que $\lambda\mathscr{E}(\lambda) \sim \mathscr{E}(1)$. Le lemme de Slutsky permet alors de dire que

$$n\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\widehat{\theta}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{E}(1).$$

On peut alors considèrer le quantile $t_{1-\alpha}$ associé à une loi $\mathscr{E}(1)$ et donc

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta \in \left[\widehat{\theta}_n - \frac{t_{1-\alpha}\widehat{\theta}_n}{n}, \widehat{\theta}_n + \frac{t_{1-\alpha}\widehat{\theta}_n}{n}\right]\right) \simeq 1 - \alpha.$$

Comme $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ, l'intervalle de confiance asymptotique trouvé se réduit de plus en plus.