Équation de la chaleur par les séries de Fourier

Théorème . Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Alors le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

admet une unique solution u continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et 2π-périodique en x.

Preuve :
Soit u une telle solution. Pour $t \geq 0$, $u(t,\cdot)$ est continue 2π-périodique de classe C^1 par morceaux donc elle est somme de sa série de Fourier

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

avec $c_n(t) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x$. De même pour $t > 0$, on a $\partial_t u(t,\cdot) \in C^0 \cap C_m^1$ donc

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_t u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n(t) e^{inx}.$$

avec $\tilde{c}_n(t) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x$. Or pour tout $t \in [t_0, t_1]$, on a

$$|\partial_t u(t,x) e^{-inx}| \leq \|\partial_t u(\cdot,x)\|_{\infty,[t_0,t_1]}$$

avec $0 < t_0 < t_1$. Donc c_n est dérivable sur $]t_0, t_1[$ et $c_n'(t) = \tilde{c}_n(t)$. Pour $t > 0$, $u(t,\cdot)$ est de classe C^3 donc on a

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_x^2 u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx}.$$

On peut alors réécrire l'équation

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big(c_n'(t) + n^2 c_n(t) \Big) e^{inx} = 0.$$

Par unicité du développement en série de Fourier, on a

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0.$$

donc $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Or $c_n(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x$ pour $t \geq 0$ et

$$|u(t,x) e^{-inx}| \leq \|u(\cdot,x)\|_{\infty,[0,1]}.$$

Donc par le théorème de continuité sous le signe intégral, c_n est continue en $0 \in [0,1]$. Donc

$$c_n(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} c_n(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \alpha_n e^{-n^2 t} = \alpha_n.$$

Donc
$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Réciproquement, u ainsi définie est une solution C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car pour $a > 0$, on a

$$|\partial_x^p \partial_t^q (c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |c_n(0)| n^{2q+p} e^{-n^2 a} \in l^1.$$

Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ car

$$|c_n(0) e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |c_n(0)| \in l^1.$$

□

Remarque Dans l'énoncé du théorème, on ne met que la classe C^2 de la solution cependant la solution est de classe C^∞. L'unicité est plus forte qu'avec la condition C^∞, car toutes solutions dont on sait qu'elle est de classe C^2 est ainsi C^∞.