Théorème de Cauchy-Lipschitz et un lemme de Gronwall

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|.$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\left| \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

définie sur I.

Preuve :
On suppose dans un premier temps I compact. On pose $\mathscr{E} := C(I, \mathbb{R}^n)$, que l'on munit d'une structure d'espace de Banach avec la norme

$$\|y\|_{\mathscr{E}} := \max_{t \in I} e^{-2L|t-t_0|}|y(t)|,$$

car elle est équivalente à la norme infinie, I étant compact. On considère

$$T : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ x & \mapsto & \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right) \end{array}.$$

Pour $x, y \in \mathscr{E}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|Ty(t) - Tz(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t (f(s,y(s)) - f(s,z(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{t_0}^t L\|y(s) - z(s)\|\mathrm{d}s.$$

On se ramène alors à la norme sur $\mathscr{E}$,

$$\|Ty(t) - Tz(t)\| \leq \|y-z\|_{\mathscr{E}} \int_{t_0}^t Le^{2L|s-t_0|}\mathrm{d}s \leq \frac{1}{2}e^{2L|t-t_0|}\|y-z\|_{\mathscr{E}}.$$

On a donc

$$e^{-2L|t-t_0|}\|Ty(t) - Tz(t)\| \leq \frac{1}{2}\|y-z\|_{\mathscr{E}}.$$

Donc, en passant au maximum sur I, que T est strictement contractante. D'après le théorème du point fixe de Picard, il existe une unique solution au problème de Cauchy.

Si I n'est pas compact, on peut toujours écrire

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

avec $(I_n)_n$ une suite croissante de compacts. On note x_n l'unique solution sur I_n. Par unicité, on a $x_{n+1}|_{I_n} = x_n$. On définit alors x sur I avec $x = x_n$ sur I_n, ce qui garantit l'existence et l'unicité dans le cas général.

$\square$

Théorème . Dans le même cadre, on considère deux solutions x et y. Alors

$$\forall t \in I, \quad \|x(t)-y(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|x(t_0)-y(t_0)\|.$$

Preuve :
On pose $\varphi(t) = \|x(t)-y(t)\|$. Alors

$$\varphi(t) = \left\| x(t_0)-y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Big(f(s,x(s))-f(s,y(s))\Big)\mathrm{d}s\right\| \leq \varphi(t_0)+L\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

On ne sait pas si φ est dérivable, mais $Y(t) := \int_{t_0}^{t}\varphi(s)\mathrm{d}s$ l'est et on a

$$Y'(t) = \varphi(t) \leq \varphi(t_0)+LY(t).$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Y(t)e^{-L(t-t_0)}\Big) = \Big(Y'(t)-LY(t)\Big)e^{-L(t-t_0)} \leq \varphi(t_0)e^{-L(t-t_0)}.$$

On intègre de t_0 à t

$$Y(t)e^{-L(t-t_0)} \leq \int_{t_0}^{t}\varphi(t_0)e^{-L(s-t_0)}\mathrm{d}s \leq \varphi(t_0)\frac{1-e^{-L(t-t_0)}}{L}.$$

On obtient alors le résultat en réinjectant cette inégalité dans la première.

□