Caractères et sous-groupes distingués

Lemme . Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ sur V de dimension d. Alors
$$\ker(\rho) = \Big\{ g \in G \; ; \; \chi(g) = \chi(e) \Big\}.$$

Preuve :
On pose $n = |G|$. Alors pour tout $g \in G$, on a $g^n = e$. Ainsi, $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(g)$ scindé à racines simples. Donc $\rho(g)$ est diagonalisable de valeurs propres $\omega_1, \ldots, \omega_d$ des racines n-ième de l'unité.
La première implication étant immédiate, supposons que $\chi(g) = \chi(e)$. Alors $\omega_1 + \ldots + \omega_d = d$, ce qui donne $\omega_1 = \ldots = \omega_d = 1$, et donc $g \in \ker(\rho)$.

□

Théorème . Soit G un groupe fini ayant m classes de conjugaison. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_m$ les caractères irréductibles de G. Alors tout sous-groupe distingué H de G est de la forme
$$H = \bigcap_{i \in I} \Big\{ g \in G \; ; \; \chi_i(g) = \chi_i(e) \Big\} =: \bigcap_{i \in I} H_i,$$
avec $I \subset [\![1, m]\!]$.

Preuve :
Soit $I \subset [\![1, m]\!]$. Comme H_i est un sous-groupe distingué de G, on a $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \lhd G$.
Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G. Soient $\rho : {}^{G}/_{H} \to GL(V)$ la représentation par permutation de ${}^{G}/_{H}$ et $\pi : G \to {}^{G}/_{H}$ la projection canonique. On pose $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi : G \to GL(V)$ et on note χ_V son caractère. On a alors
$$\tilde{\rho}(g) = Id_V \iff \rho(\pi(g)) = Id_V \iff \pi(g) = H \iff g \in H,$$
ie $H = \ker(\tilde{\rho})$. On décompose ensuite χ_V sur les caractères irréductibles de G
$$\chi_V = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{N}.$$
On montre alors $\Big(\forall i \in [\![1, m]\!], a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(e) \Big) \iff \Big(\chi_V(g) = \chi_V(e) \Big)$.
La première implication est immédiate par la décomposition de χ_V. Réciproquement, supposons que $\chi_V(g) = \chi_V(e)$. Alors
$$\Big|\chi_V(g)\Big| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i(g) \right| \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \Big|\chi_i(g)\Big| \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i(e) = \chi_V(e) = \Big|\chi_V(g)\Big|,$$
la dernière inégalité étant vraie car les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines de l'unité par le même raisonnement que dans le lemme. Il y a donc égalité dans les deux inégalités, ce qui

donne l'égalité voulue.
On pose alors $I = \{i \in [\![1,m]\!] \ ; \ a_i > 0\}$. Le lemme permet alors de conclure que

$$H = \{g \in G \ ; \ \chi_V(g) = \chi_V(e)\} = \{g \in G \ ; \ \forall i \in [\![1,m]\!], a_i\chi_i(g) = a_i\chi_i(e)\},$$

et donc

$$H = \bigcap_{i \in I} \{g \in G \ ; \ \chi_i(g) = \chi_i(e)\}.$$

□

Application . On peut trouver les sous-groupes de S_4 à partir de la table de S_4.