Théorème de Banach-Alaoglu et minimisation d'une fonctionnelle convexe

Théorème . Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé séparable. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Alors il existe une extractrice φ et $T \in E'$ tels que

$$\forall x \in E,\ T_{\varphi(n)}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx.$$

Preuve :
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(T_n x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée car

$$|T_n(x_i)| \leq \|x_i\| M,$$

avec $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$, donc on peut en extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$. Par le procédé d'extraction diagonale, il existe une extractrice φ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad T_{\varphi(n)}x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_i,$$

en notant Tx_i la limite. On montre ensuite que $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| \leq |T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(p)}x_i| + |T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| + |T_{\varphi(q)}x_i - T_{\varphi(q)}x|$$

avec x_i tel que $\|x - x_i\| \leq \varepsilon$. Alors

$$|T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| \leq 2M\varepsilon + |T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i|.$$

Or $|T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| \leq \varepsilon$ pour p, q assez grand car $(T_{\varphi(n)}x_i)_n$ converge. Donc pour p, q assez grand on a

$$|T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| \leq (2M+1)\varepsilon$$

donc $(T_{\varphi(n)}x)_n$ est de Cauchy. Donc elle converge vers une limite notée Tx, $\mathbb{R}$ étant complet. T est linéaire car limite simple d'applications linéaires et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |T_{\varphi(n)}x| \leq M\|x\|$$

donc T est continue et $\|T\| \leq M$.

□

Corollaire . Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe et coercice, c'est-à-dire $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} J(x) = +\infty$, avec H un espace de Hilbert séparable. Alors il existe $x_0 \in H$ tel que

$$J(x_0) = \inf_x \{J(x)\}.$$

Preuve :
Soit $(x_n)_n$ une suite minimisante. Si elle n'était pas bornée, alors il existerai une extractrice φ telle que $\|x_{\varphi(n)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui implique que $\inf_x\{J(x)\} = +\infty$ absurde.
Alors la suite $(\langle x_n, \cdot\rangle)_n$ de H' est bornée donc, par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe φ telle que

$$\forall y \in H, \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x_0, y\rangle$$

avec $x_0 \in H$ car le théorème de Riesz permet de représenter toute forme linéaire continue comme le produit scalaire contre un vecteur. Il reste alors à montrer que $x_0 = \inf_x\{J(x)\}$.

Soit $\alpha > \inf_x\{J(x)\}$. On pose $K := \Big\{x \in H \ ; \ J(x) < \alpha\Big\}$. Alors

- Comme $J(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_x\{J(x)\} < \alpha$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies x_{\varphi(n)} \in K$. En particulier, K est non vide.
- J étant continue, K est fermée.
- J étant convexe, K est convexe.

On considère P_K la projection orthogonale sur K. Alors

$$\forall n \geq N, \quad \langle x_0 - P_K(x_0), x_{\varphi(n)} - P_K(x_0)\rangle \leq 0.$$

En passant à la limite on trouve $\|x_0 - P_K(x_0)\| \leq 0$ donc $x_0 \in K$. Donc

$$\forall \alpha > \inf_x\{J(x)\}, \quad J(x_0) \leq \alpha$$

donc $J(x_0) = \inf_x\{J(x)\}$.

□

Remarque

- En dimension finie, l'application est immédiate la coercivité garantit que pour minimiser J, il suffit de se placer sur une boule suffisamment grande. La compacité de la boule unité et la continuité de J permettent de conclure. En dimension infinie, le résultat est plus délicat à obtenir et faire appel à la compacité de la boule unité pour une topologie plus faible, c'est-à-dire le théorème de Banach-Alaoglu.
- L'hypothèse H séparable n'est pas réellement nécéssaire car on peut toujours considérer l'espace de Hilbert $\overline{\mathrm{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})}$ qui est lui séparable. Quant au théorème de Banach-Alaoglu, il reste vrai dans un cadre non séparable mais fait appel au théorème de Tychonoff qui dit qu'un produit de compact est compact, donc à l'axiome du choix.
- Minimiser des fonctionnelles J continue convexe coercice en dimension infinie est un problème important en physique car les énergies sont souvent convexes par des arguments physiques. C'est aussi un problème central en controlabilité et théorie des jeux, où un coût à minimiser est convexe.