Quelques applications de la transformation de Fourier discrète

Théorème . Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{ij} \right)$$

avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Preuve :
Soit G un groupe abélien fini. Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on définit

$$\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \\ g & \mapsto & f * g \end{array}.$$

Soit $\chi \in \widehat{G}$. On utilise la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ qui est un isomorphisme d'algèbre entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ ce qui donne

$$\mathscr{F}(f * \chi) = \widehat{f}\widehat{\chi}.$$

On a

$$\forall u \in \widehat{G}, \quad \widehat{\chi}(u) = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{u}(g) = |G|\left\langle \chi, \overline{u} \right\rangle = |G|\delta_{\chi^{-1}}(u).$$

Donc $\mathscr{F}(f * \chi) = |G|\widehat{f}(\chi^{-1})\delta_{\chi^{-1}}$. On peut alors appliquer l'inverse de la transformaton de Fourier avec $\widehat{f}(\chi^{-1})$ comme un scalaire ce qui donne

$$f * \chi = \widehat{f}(\chi^{-1})\chi.$$

Or $\widehat{G}$ étant une base de $\mathbb{C}[G]$, on a trouvé une base de vecteurs propres et en particulier toutes les valeurs propres. Trouvons maintenant la matrice de Φ_f dans la base canonique $(\delta_g)_{g \in G}$. Pour $g \in G$, on a

$$\forall h \in G, \quad (f * \delta_g)(h) = \sum_{k \in G} f(h-k)\delta_g(k) = f(h-g).$$

Donc la matrice de Φ_f dans cette base est $\Big(f(h-g)\Big)_{h,g \in G}$.
G étant cyclique, on identifie $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la matrice de Φ_f est alors

$$A = \Big(f(i-j)\Big)_{i,j \in [\![0,n-1]\!]}.$$

Si on note $f(i) = a_i$, on a alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi^{-1}) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi).$$

On a $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \left\{ i \mapsto \omega^i \ ; \ i \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Et pour $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\widehat{f}(i) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j) w^{ij}.$$

On peut alors conclure que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{ij} \right)$$

□

Théorème . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la marche aléatoire issue de X_0 de loi $p^{(0)}$ donnée par

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} X_j,$$

avec $(X_j)_{j \geq 0}$ indépendantes et $(X_j)_{j \geq 1}$ identiquement distribuées de loi ν. Alors, en notant $p^{(k)}$ la loi de S_k,

$$\left(p^{(k)} \text{ converge vers } p^\infty \text{ pour tout } p^{(0)} \right) \iff \left(\forall j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, |\widehat{\nu}(j)| = 1 \implies \widehat{\nu(j)} = 1 \right),$$

avec

$$\widehat{p^\infty}(j) = \begin{cases} \widehat{p^{(0)}} & \text{si } \widehat{\nu}(j) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Preuve :
Par indépendance de X_1 et X_0 on a, pour tout $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_0 + X_1 = j) = \sum_{l_0 + l_1 = j} \mathbb{P}(X_0 = l_0)\mathbb{P}(X_1 = l_1) = \sum_{l=0}^{j} \mathbb{P}(X_0 = l)\mathbb{P}(X_1 = j - l) = \nu * p^{(0)}.$$

En itérant, on en déduit

$$p^{(k)} = \nu * \ldots * \nu * p^{(0)}.$$

On passe alors dans le domaine de Fourier nos lois, ce qui donne

$$\forall j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \widehat{p^{(k)}}(j) = \widehat{\nu}(j)^k \widehat{p^{(0)}}(j),$$

ce qui nous ramène à étudier une suite géométrique dans $\mathbb{C}$. On a

$$\forall j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, |\widehat{\nu}(j)| = \left| \sum_{l=0}^{n-1} \nu(l) e^{\frac{2i\pi jl}{n}} \right| \leq \sum_{l=0}^{n-1} |\nu(l)| |e^{\frac{2i\pi jl}{n}}| = 1,$$

car ν est une mesure de probabilité. On en déduit que la suite $(p^{(k)})(j)$ converge si et seulement si $|\widehat{\nu}(j)| = 1 \implies \widehat{\nu(j)} = 1$, ce qui donne la condition annoncée, et que la limite vérifie la condition annoncée.

□

■ **Exemple** On se place dans le cas où $\nu(1)=p\in]0,1[$ et $\nu(-1)=1-p=q$. On a alors pour tout $j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\widehat{\nu}(j)=pe^{\frac{2ij\pi}{n}}+qe^{\frac{-2ij\pi}{n}}.$$

Si n est pair, alors $|\widehat{\nu}(\frac{n}{2})|=|-1|=1$, la marche ne converge donc pas. On remarque en effet qu'avec un nombre de pas pair, on ne peut qu'être sur un état de la même parité que l'état de départ. Avec un langage probabiliste, on dit que la chaine est périodique.
Dans le cas n impair, on a $\widehat{\nu}(j)<1$ pour $j\neq 0$ et $\widehat{\nu}(0)=1$, il y a donc convergence. On sait alors que $\widehat{p^\infty}=\delta_0$. La formule d'inversion de Fourier donne pour $j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$p^\infty(j)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\delta_0(l)e^{-\frac{2i\pi jl}{n}}=\frac{1}{n}.$$

Si on rajoute une possibilité de rester dans l'état, c'est-à-dire $\nu(1)=p>0$, $\nu(-1)=q>0$ et $\nu(0)=r>0$ avec $p+q+r=1$, alors le calcul montre que la chaine converge bien vers la loi uniforme, il n'y a plus de périodicité dans le cas pair. ■