Des sommes de Riemann à l'intégrale de Young

Antoine MOUZARD

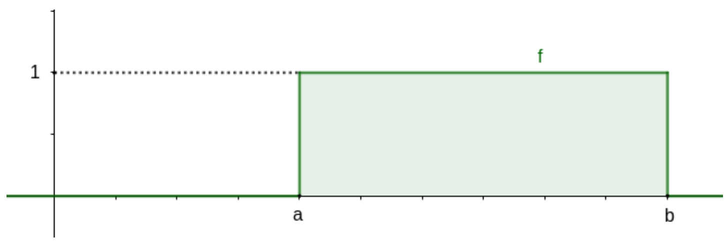
Table des matières

La notion d'intégration est apparue comme un besoin en physique, celui de mesurer l'aire sous une courbe et ainsi calculer une énergie. Depuis, elle est devenue un objet mathématique que l'on peut considérer de différents points de vue. Nous allons ici chercher à présenter les différentes notions d'intégration construite à l'aide des sommes de Riemann, après avoir identifié les différentes propriétés que doit vérifier toute notion d'intégration raisonnable. Dans une première partie, on définit l'intégrale de Riemann et on énonce ses propriétés importantes. Dans une deuxième partie, on généralise la fonction de référence par rapport à laquelle on intègre avec l'intégrale de Stieltjes. Pour finir, on définit l'intégrale de Young qui est le cadre le plus général dans lequel cette théorie s'inscrit.

1 Intégrale de Riemann

1.1 L'intégrale, un objet physique

On veut construire une application qui à une fonction $f : x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ associe l'aire sous sa courbe $\mathbf{I}(f)$. Elle est comptée positivement pour les valeurs positives et négativement pour les valeurs négatives. Nécéssairement, l'intégrale de l'indicatrice d'un segment $[a, b]$ doit valoir $b - a$.



De plus, pour des raisons géométriques, on a pour toutes fonctions f, g et tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{I}(f+g) = \mathbf{I}(f) + \mathbf{I}(g) \quad \text{et} \quad \mathbf{I}(\alpha f) = \alpha \mathbf{I}(f)$$

c'est-à-dire $f \mapsto \mathbf{I}(f)$ linéaire. Ces deux conditions imposent la définition de l'intégrale sur l'espace vectoriel engendré par les indicatrices. Pour tous segment $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ et tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on a

$$\mathbf{I}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (b_i - a_i).$$

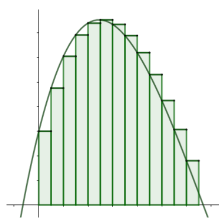
La troisième propriété que doit vérifier $\mathbf{I}$ est une propriété de continuité. Si on modifie peu les données, ou si on change peu la représentation graphique, l'intégrale doit être peu modifiée. Ceci est fondamentale pour un objet que utilisé avec des données expérimentales, que ce soit en physique, en biologie ... On peut alors définir l'intégrale de Riemann par ces trois propriétés. On utilise la notation $\int$ introduite par Leibnitz en 1675, qui est une abréviation de *summa* - somme en latin.

Définition (Intégrale de Riemann - 1854)**.** *Soient J un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction qui est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\geq 0}$. On définit alors l'intégrale de f sur J par*

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_J f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier la cohérence des hypothèses, c'est-à-dire que l'application $\mathbf{I}$ est bien continue sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices munit de la norme infinie - ce qui est bien le cas. On prolonge ensuite $\mathbf{I}$ par densité aux fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier. Une fois cette définition mathématique abstraite on peut se demander comment l'utiliser en pratique et quelles sont les fonctions que l'on peut intégrer. On peut montrer qu'une fonction est reglée, ie limite de fonctions en escalier, si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point. Plus simplement, une fonction continue est reglée.

Il existe de nombreuses méthodes pour approcher une fonction continue par des fonctions en escalier. Une des méthodes les plus simples est celle des rectangles à gauche. On approche, pour une subdivision de l'intervalle J, la fonction par sa valeur à gauche en chaque sous-intervalle. Une fonction continue sur un compact étant uniformément continue, on a convergence uniforme de cette méthode. Et on a ainsi une manière de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction continue.



Rectangles à gauche

On peut aussi approcher f sur un élément de la subdivision à droite, au milieu, par un fonction affine, quadratique ... Le choix dépend de la précision souhaitée ou encore des fonctions à approchées. Mais ce choix est seulement important pour le calcul approché et ne change pas la valeur exacte de l'intégrale. Ce n'est pas le cas pour toutes les théories d'intégration, comme par exemple l'intégration stochastique où les méthodes des rectangles à gauche et à droite donnent des intégrations différentes - Itô et Stratonovich. Dans toute la suite, on fait la choix arbitraire de la méthode des rectangles à gauche. Si de plus, on s'autorise à choisir un nombre fixé de n points de l'intervalle J pour approcher numériquement l'intégrale, le choix du placement de ces points peut grandement améliorer le calcul. Par exemple, la méthode de Monte-Carlo consiste à choisir ces points de manière aléatoire et permet d'avoir une vitesse indépendante de la dimension, ce qui est intéressant en grande dimension.
Avec la méthode des rectangles à gauche, on a pour tout $a < b$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{|\mathscr{P}|\to 0} \sum_{[x_i,x_{i+1}]\in\mathscr{P}} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

existe où $\mathscr{P}$ est une partition du segment $[a, b]$ et $|\mathscr{P}| := \sup_{[x_i,x_{i+1}]\in\mathscr{P}} |x_{i+1} - x_i|$.

Remarque. *La théorie de l'intégration de Lebesgue, introduite en 1901, généralise cette notion. Elle coïncide lorsque l'on munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue et qu'on considère les fonctions Riemann-intégrables, mais il existe des fonctions Lebesgue-intégrables qui ne sont pas Riemann-intégrables comme par exemple l'indicatrice de $\mathbb{Q}$. C'est une bonne illustration de la différence de philosophie entre les deux théories. En effet, l'intégration de Riemann se base sur une subdivision de l'ensemble de départ, ici $[a, b]$, alors que l'intégration de Lebesgue mesure découpe l'espace de départ selon les ensembles de niveau $f(x) = \alpha$, ici α valant 0 ou 1 pour l'indicatrice.*

1.2 Quelques propriétés

L'intégrale peut être construite selon différents points de vue. Plusieurs propriétés importantes de l'intégrale de Riemann peuvent être prises comme définition. Mais peu importe la définition, l'intégrale vérifie certaines propriétés fondamentales que nous allons énoncer.

Proposition. *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions intégrables qui converge uniformément sur un intervalle compact* J *vers une fonction* f. *Alors* f *est intégrable et*

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n(x)\mathrm{d}x.$$

C'est cette propriété qui traduit la sensibilité de l'intégrale à l'erreur dans les données. Une autre propriété physique importante est la relation de Chasles.

Proposition (Relation de Chasles)**.** *Soient* $a < b < c$ *et* f *une fonction intégrable sur* $[a, c]$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

La relation étant vraie pour les fonctions en escaliers, elle est vraie pour des fonctions intégrables par passage à la limite.

Pour finir, l'intégrale permet de relier une fonction f et sa dérivée. En effet, si on se donne les variations infinitésimales d'une fonction f en tous points de $[a, b]$, on peut retrouver l'accroissement de f entre a et b :

$$f(a) - f(b) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$$

Dans la théorie de *Bourbaki*, ce théorème est la définition - l'intégrale est définie comme la primitive s'annulant en un certain point - et l'approximation par des sommes de Riemann est une propriété.

Théorème (Fondamental de l'analyse)**.** *Soit* $f : J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* J. *Alors pour tout* $a \in J$, *la fonction* $t \mapsto \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ *est dérivable de dérivée* f.

Ce théorème permet de calculer la valeur exacte de certaines intégrales mais il peut aussi être utilisé pour étudier de nombreux problèmes en analyse. Par exemple, on peut démontrer les fomules de Taylor simplement en écrivant

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(x) + \int_x^y f'(z_1)\mathrm{d}z_1 \\
&= f(x) + \int_x^y \left(f'(x) + \int_x^{z_1} f^{(2)}(z_2)\mathrm{d}z_2 \right) \mathrm{d}z_1 \\
&= f(x) + f'(x)(x-y) + \int_x^y f^{(2)}(z)(y-z)\mathrm{d}z \\
&= f(x) + f'(x)(x-y) + f^{(2)}(x)\frac{(x-y)^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

les différentes intégrales itérées donnant les termes $\frac{(x-y)^n}{n!}$. On peut aussi voir par exemple l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) = f(y(t))$$

comme un point fixe de l'application T définie par

$$T(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\mathrm{d}s.$$

L'interêt est en particulier qu'il est plus facile d'itérer un opérateur d'intégration qu'un opérateur de dérivation. Autre exemple, le théorème suivant est une forme intégrale du théorème des accroissement finis.

Théorème (de la moyenne)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

En particulier, le théorème implique que si $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

qui peut aussi être vu comme une conséquence directe de la croissance de l'intégrale. Ce point de vue peut aussi être pris pour définir l'intégrale de Riemann par

$$\int_J f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\varphi \leq f} \int_J \varphi(x)\mathrm{d}x = \inf_{\psi \geq f} \int_J \psi(x)\mathrm{d}x$$

où les bornes supérieures et inférieures sont prises sur l'espace des fonctions en escalier.

2 Intégrale de Stieltjes

Comment généraliser cettre notion d'intégrale ? Une première réponse a été l'intégration de Riemann-Stieltjes, développée par Stieltjes en 1894. Avec l'intégration de Riemann, on intègre par rapport à la fonction de référence $\varphi(x) = x$. Ici on va chercher comment et à quelle condition on peut intégrer par rapport à une fonction φ qui va pondérer chaque point x. L'interêt est de donner un sens à des équations de la forme

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\mathrm{d}Y_t$$

d'inconnue $t \mapsto X_t$ avec $t \mapsto Y_t$ donnée. On veut alors construire une intégrale $\mathbf{I}_\varphi$ qui vérifie pour tout $a < b$

$$\int_a^b \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi(b) - \varphi(a),$$

$\mathbf{I}_\varphi : f \mapsto \mathbf{I}_\varphi(f) = \int_I f(x)\mathrm{d}\varphi(x)$ linéaire et continue pour la topologie de la convergence uniforme. Pour que cette intégrale soit bien définie, il faut une fois de plus la continuité de $\mathbf{I}_\varphi$ sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices munit de la norme uniforme. La condition nécéssaire sur φ va faire intervenir la notion de variation totale d'une fonction.

2.1 Variation d'une fonction

Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{[x_i, x_{i+1}]}$. On a alors

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x) \right| = \left| \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{[x_i, x_{i+1}]}(x)\mathrm{d}\varphi(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha_i \mathrm{d}\varphi(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) \Big) \right|$$

ce qui donne

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x) \right| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|.$$

Ainsi, pour que $\mathbf{I}_\varphi$ soit continue, il suffit que de controler les variations de φ.

Définition. *On appelle variation de la fonction φ sur $[a, b]$ la quantité*

$$Var(\varphi) := \sup_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

où la borne supérieur est prise sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Une fonction φ est dite à variation finie si $Var(\varphi) < \infty$.

On peut alors écrire l'inégalité précédente

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x)\right| \leq \|f\|_\infty \operatorname{Var}(\varphi)$$

ce qui traduit la continuité pour la norme infinie de $f \mapsto \mathbf{I}_\varphi(f)$. On peut alors définir l'intégrale de Stieltjes.

Définition (Intégrale de Stieltjes)**.** *Soient J un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à variation finie sur J et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction qui est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\geq 0}$. On définit alors l'intégrale de f sur J contre φ par*

$$\int_J f(x)\mathrm{d}\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} \int_J f_n(x)\mathrm{d}\varphi(x).$$

Dans le cas où φ est de classe C^1, elle est à variation finie sur le compact I et on a

$$\int_J f(x)\mathrm{d}\varphi(x) = \int_J f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

Cette relation se comprend bien au niveau des sommes en écrivant

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=1}^n f(x_i)\varphi'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Cela traduit bien qu'on pondère en chaque point la manière dont on compte les valeurs de f.

Remarque. *On a vu qu'il était suffisant que φ soit à variation finie sur I pour définir l'intégrale $\mathbf{I}_\varphi$. Cela demande plus de travail mais on peut montrer que c'est nécessaire si on veut pouvoir intégrer les fonctions continues sur J.*

Un exemple simple de fonction à variation finie sur $[a,b]$ est celui d'une fonction monotone. En effet, si par exemple φ est croissante on a

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| = \sum_{i=1}^n \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

pour toute subdivision $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $[a,b]$. La proposition suivante nous montre que ce cas particulier est fondamentale.

Proposition. *Toute fonction à variation finie φ peut s'écrire*

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

avec φ^+ et φ^- deux fonctions croissantes.

En particulier, une fonction croissante est reglée car elle admet un nombre dénombrable de discontinuités et admet une limite à gauche et à droite en ces points ce qui donne le corrollaire suivant.

Corollaire. *Une fonction à variation finie est reglée.*

L'ensemble des fonctions à variation finie sur $[a,b]$ est un espace vectoriel et on peut le munir de la norme $\|\varphi\|_{\mathrm{var}} = \operatorname{Var}(\varphi) + |\varphi(a)|$. On a alors la proposition suivante.

Proposition. *L'application $(f,g) \mapsto \int_J f\mathrm{d}g$ est bilinéaire et continue sur le produit de l'espace des fonctions réglées avec celui des fonctions à variations finie munie de la norme produit $\|\cdot\|_\infty \times \|\cdot\|_{var}$.*

Pour finir, on dispose aussi d'une formule de la moyenne pour l'intégrale de Stieltjes.

Théorème (de la moyenne)**.** *Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation finie et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b f(x) \mathrm{d}\varphi(x).$$

On peut de même utiliser cette idée pour définir l'intégrale de stieltjes par

$$\int_J f(x) \mathrm{d}\varphi(x) := \sup_{\psi \leq f} \int_J \psi(x) \mathrm{d}\varphi(x) = \inf_{\widetilde{\psi} \geq f} \int_J \widetilde{\psi}(x) \mathrm{d}\varphi(x)$$

où les bornes supérieurs et inférieurs sont aussi prises sur l'espace des fonctions en escalier.

Remarque. *On peut aussi construire l'intégrale de Stieltjes par la théorie de l'intégration de Lebesgue. Si φ est croissante, on peut définir une mesure sur $[a, b]$ par*

$$\mu_\varphi([s, t]) = \varphi(t) - \varphi(s)$$

où $a < s < t < b$. Alors on définit

$$\int_J f(x) \mathrm{d}\varphi(x) = \int_J f(x) \mathrm{d}\mu_\varphi(x).$$

Dans le cas d'une fonction à variation finie, on sait qu'elle s'écrit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ et on définit

$$\int_J f(x) \mathrm{d}\varphi(x) = \int_J f(x) \mathrm{d}\mu_{\varphi^+}(x) - \int_J f(x) \mathrm{d}\mu_{\varphi^-}(x).$$

2.2 Une intégration par parties

Si g est seulement continue sur $[a, b]$, on ne sait pas comment intégrer une fonction f contre g au sens de l'intégration de Stieltjes. Cependant si f est elle-même à variation bornée, le théorème d'intégration par parties nous donne envie de définir l'intégrale de f contre g par

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}g(x) := [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \mathrm{d}f(x),$$

le membre de droite ayant un sens car g est continue et f à variation finie. On a alors

$$\left| \int_J f(x) \mathrm{d}g(x) \right| \leq 3\|f\|_\infty \|g\|_{\mathrm{var}}$$

ce qui garantie la continuité.

Définition. *Soient $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à variation finie sur $[a, b]$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction reglée. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ contre g par*

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}g(x) := f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) \mathrm{d}f(x).$$

L'inégalité précédente garantit la continuité de la proposition suivante.

Proposition. *L'application $(f, g) \mapsto \int_J f \mathrm{d}g$ est bilinéaire et continue du produit de l'espace des fonctions à variation finie avec celui des fonctions réglées munie de la norme produit $\|\cdot\|_{var} \times \|\cdot\|_\infty$.*

L'intégration par parties peut laisser penser qu'il existe une certaine symétrie lorsque l'on cherche à intégrer f contre g ou g contre f. On peut se demander quelle est la condition la plus faible pour pouvoir intégrer deux fonctions données l'une par rapport à l'autre. La réponse est donnée par l'intégrale de Young. De manière générale, on a la définition suivante. La question est alors de savoir exactement quand f est intégrable contre g.

Définition. *Soient f et g deux fonctions définies sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est intégrable contre g sur $[a, b]$ si pour toute famille de subdivision $\mathscr{P}_n$ dont le pas tend vers 0, la suite définie par*

$$\sum_{(x_i, x_{i+1}) \in \mathscr{P}_n} f(x_i)\Big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\Big)$$

converge vers une limite indépendante de la suite $\mathscr{P}_n$ choisie. On note alors cette limite $\int_a^b f \mathrm{d}g$.

Remarque. *À l'aide d'une transformation d'Abel, on peut montrer que la somme de Riemann-Stieltjes de f contre g converge quand le pas de la subdivision tend vers 0 si et seulement si celle de g contre f converge, et dans ce cas on a bien l'égalité précédente.*

Un cas qui a été beaucoup étudié est celui de l'intégration contre le mouvement Brownien $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto B_t$. Ce dernier admet des trajectoires presque sûrement continues, on peut donc définir par ce moyen

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}B_t$$

pour toute fonction f à variation finie presque sûrement. Cependant on cherche à intégrer des fonctions du type $f(B_t)$ avec f régulière et ce résultat n'est alors pas suffisant.

3 Intégrale de Young

L'intégrale de Young, développée en 1936 par Laurence C. Young, nous donne une condition équivalente pour pouvoir définir une notion d'intégration entre f et g qui vérifie les trois conditions désirées : linéarité, continuité et donnant l'aire du rectange pour le cas d'une indicatrice.

3.1 Une inégalité de Young

Pour définir l'intégrale de Young, nous avons besoin de généraliser la notion de variation à celle de p-variation.

Définition (p-variation)**.** *On appelle p-variation de la fonction f sur $[a, b]$ la quantité*

$$Var_p(f) := \sup_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Une fonction f est dite à p-variation finie si $Var_p(f) < \infty$. On peut aussi la noter $Var_p(f, [a, b])$ pour insister sur la dépendance par rapport au segment $[a, b]$.

La proposition suivante garantit en particulier que toute fonction à variation finie est à p-variation finie pour $p \geq 1$.

Proposition. *Soient $q \geq p \geq 1$ et f une fonction à p-variation finie. Alors f est à q-variation finie et*

$$Var_q(f) \leq Var_p(f).$$

On dispose alors de l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité de Young-Léove)**.** *Soient f et g deux fonctions à variation finie sur $[a, b]$. Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Alors*

$$\left| \int_a^b f \mathrm{d}g - f(a)\Big(g(b) - g(a)\Big) \right| \leq \frac{1}{1 - 2^{1-r}} \, Var_p(f) \, Var_q(g)$$

C'est parce que ce résultat donne une majoration à l'aide de la p-variation de f et de la q-variation de g que l'on va pouvoir définir $\int_a^b f\mathrm{d}g$ si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$. En effet, on se donne une fonction g à q-variation finie. Alors on définit pour toute fonction de la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $a \leq a_i < b_i \leq b$, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'intégrale de f contre g par

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Big(g(b_i) - g(a_i) \Big).$$

Comme pour les intégrales de Riemann et Stieltjes, on veut l'étendre par densité aux fonctions à p-variation finie. Pour cela, il faut un résultat de continuité. On a

$$\left| \int_a^b f\mathrm{d}g \right| \leq \frac{1}{1-2^{1-r}} \mathrm{Var}_p(f)\mathrm{Var}_q(g) + 2\|f\|_\infty \|g\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1-2^{1-r}} + 2 \right) \|f\|_{\mathrm{Var}_p} \|g\|_{\mathrm{Var}_q}$$

avec les normes $\|f\|_{\mathrm{Var}_p} := \mathrm{Var}_p(f) + |f(a)|$ et $\|g\|_{\mathrm{Var}_q} := \mathrm{Var}_q(g) + |g(a)|$ comme dans le cas des fonctions à variation finie. Lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ tend vers 1, on voit que la constante qui dépend de p et q tend vers l'infini ce qui laisse penser que c'est le cas limite. On peut montrer que c'est bien le cas.

3.2 Intégrale de Young

On dispose alors d'une forme linéaire continue pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{Var}_p}$ définie sur les fonctions en escalier. La question naturelle est alors de trouver quelles sont les fonctions qui sont limite de fonctions en escalier pour cette norme. Malheuresement, les fonctions en escalier ne sont pas dense dans les fonctions à p-variation finie. Cela vient du fait que l'espace de Banach des fonctions à p-variation finie n'est pas séparable. On peut cependant s'en sortir à la main grâce à l'inégalité de Young-Lóeve.

Théorème. *Soient f et g deux fonctions respectivement à p-variation et q-variation finie sur le segment $[a,b]$. Alors la suite*

$$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\Big(g(x_{i+1}) - g(x_i) \Big) \right)_{n\geq 0}$$

est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour toute suite de subdivision $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0 et croissante pour l'inclusion. En particulier, elle converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite de subdivision choisie que l'on appelle intégrale de Young et que l'on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

Preuve : On considère une suite de subdivisions $(x_1^n, \dots, x_{n+1}^n)$ de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0 et croissante pour l'inclusion. On note f_n la fonction constante par morceau sur la subdivision $(x_1^n, \dots, x_{n+1}^n)$ obtenue par la méthode des rectangles à gauche. Soient $n_2 \geq n_1 \geq 0$. Alors

$$\left| \int_a^b f_{n_2}(x)\mathrm{d}g(x) - \int_a^b f_{n_1}(x)\mathrm{d}g(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{n_1} \left| \int_{x_i^{n_1}}^{x_{i+1}^{n_1}} f_{n_2}(x)\mathrm{d}g(x) - f_{n_1}(x_i^{n_1})\Big(g(x_{i+1}^{n_1}) - g(x_i^{n_1}) \Big) \right|.$$

Or pour tout $1 \leq i \leq n_1$ on a $f_{n_1}(x_i^{n_1}) = f_{n_2}(x_i^{n_1})$ donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_{n_2}(x)\mathrm{d}g(x) - \int_a^b f_{n_1}(x)\mathrm{d}g(x) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \left| \int_{x_i^{n_1}}^{x_{i+1}^{n_1}} f_{n_2}(x)\mathrm{d}g(x) - f_{n_2}(x_i^{n_1})\Big(g(x_{i+1}^{n_1}) - g(x_i^{n_1}) \Big) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{1-2^{1-r}} \mathrm{Var}_p(f, [x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1}])\mathrm{Var}_q(g, [x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1}]). \end{aligned}$$

On note $\omega(x_i, x_{i+1}) := \mathrm{Var}_p(f, [x_i, x_{i+1}])^{\frac{1}{r}} \mathrm{Var}_q(g, [x_i, x_{i+1}])^{\frac{1}{r}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_{n_2}(x)\mathrm{d}g(x) - \int_a^b f_{n_1}(x)\mathrm{d}g(x) \right| &\leq \frac{1}{1-2^{1-r}} \sum_{i=1}^{n_1} \omega(x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1})^r \\
&\leq \frac{\left(\sup_i \omega(x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1})\right)^{r-1}}{1-2^{1-r}} \sum_{i=1}^{n_1} \omega(x_i^{n_1}, x_i^{n_2}) \\
&\leq \frac{\left(\sup_i \omega(x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1})\right)^{r-1}}{1-2^{1-r}} \mathrm{Var}_p(f)^{\frac{1}{r}} \mathrm{Var}_q(g)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Or $\sup_i \omega(x_i^{n_1}, x_{i+1}^{n_1})$ tend vers 0 quand le pas de la subdivision tend vers 0 et $r > 1$, donc la suite est bien de Cauchy. L'unicité s'obtient par un calcul similaire.

□

On aurait pu raisonner par densité grâce au résultat suivant en considérant une suite de fonctions à $(p+\varepsilon)$-variation finie.

Proposition. *Soient $1 \leq q < p$. Alors toute fonction à q-variation finie est limite pour la norme $\|\cdot\|_{Var_p}$ d'une suite de fonctions à p-variation finie.*

3.3 Espaces de Hölder

Un cadre naturel dans de nombreuses applications pour étudier ce problème est celui des fonctions α-Hölder. En probabilité, les processus sont souvent continus et c'est alors leur régularité en terme d'espaces de Hölder qui nous intéresse. Le mouvement Brownien par exemple est continu et est seulement $(\frac{1}{2} - \kappa)$-Hölder pour tout $\kappa > 0$.

Définition (Espaces de Hölder)**.** *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite α-Hölder avec $\alpha \in]0,1[$ s'il existe une constance $C > 0$ telle que*

$$\forall t, s \in [a,b], |f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

On note $\|f\|_\alpha$ la plus petite constance telle que cette inégalité soit vraie.

Théorème. *L'ensemble des fonctions α-Hölder est un espace vectoriel et, munit de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, c'est un espace de Banach.*

En particulier, une fonction est à p-variation finie si elle est $\frac{1}{p}$-Hölder. La réciproque n'est pas vraie, par exemple $t \mapsto \sqrt{t}$ est à variation finie mais pas lipschitizienne. Être à p-variation finie n'implique pas être continue - par exemple les fonctions en escalier sont à p-variation finie pour tout $p \geq 1$. L'intégrale de Young donne le théorème suivant.

Théorème. *Soient f et g deux fonctions respectivement α-Hölder et β-Hölder sur $[a,b]$ avec $\alpha + \beta > 1$. Alors l'intégrale de Young de f contre g existe et on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \lim_{|\mathscr{P}|\to 0} \sum_{[x_i, x_{i+1}] \in \mathscr{P}} f(x_i)\Big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\Big)$$

avec la même notation que pour l'intégrale de Riemann.

Preuve : Dans le cas des fonctions Hölder, la preuve est directe. Pour une subdivision $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) - \sum_{i=1}^n f(x_i)\Big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\Big) \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(f(x) - f(x_i)\Big)\mathrm{d}g(x) \right| \\
&\leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta \sum_{i=1}^n |x_{i+1} - x_i|^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

La condition $\alpha + \beta > 1$ garantit la convergence vers 0 de $\sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|^{\alpha+\beta}$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 car la fonction $x \mapsto x$ est à variaton finie.

$\square$

Il existe des contre-exemples qui montrent que c'est bien le cas limite, c'est-à-dire des fonctions α-Hölder et β-Hölder telles que $\alpha + \beta = 1$ et que la somme ne converge pas. On peut alors définir une solution à l'équation

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\mathrm{d}Y_t$$

si $t \mapsto Y_t$ est α-Hölder avec α assez grand. En effet, on considère l'équation sous forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_t)\mathrm{d}Y_t.$$

Au vu de l'équation, on s'attend à ce que $t \mapsto X_t$ ait la même régularité que $t \mapsto Y_t$. Si f est régulière, $t \mapsto f(X_t)$ est ainsi α-Hölder et la condition pour que l'équation intégrale ait un sens est $\alpha + \alpha > 1$. On a alors donné un sens à l'équation pour toute fonction $t \mapsto Y_t$ α-Hölder telle que $\alpha > \frac{1}{2}$. Cependant, la cas des équations différentielles stochastiques où la fonction de référence est le mouvement Brownien n'est pas traité. Une réponse a été donnée par Kiyoshi Itô en 1944 par des moyens probabilistes. On va ici introduire une solution plus récente donnée par Terry Lyons en 1998.

3.4 Rough path

Pour comprendre comment définir $\displaystyle\int_0^t f(X_s)\mathrm{d}Y_s$, on considère le cas régulier. Soit $t \mapsto X_t$ une solution de l'équation

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\mathrm{d}Y_t.$$

En appliquant la formule $X_t = X_s + \int_s^t \mathrm{d}X_u$ plusieurs fois, on a

$$\begin{aligned}
X_t - X_s &= \int_s^t f(X_u)\mathrm{d}Y_u \\
&= f(X_s)\int_s^t \mathrm{d}Y_u + \int_s^t \int_s^u [f'(X_r)f(X_r)]\mathrm{d}Y_r\mathrm{d}Y_u \\
&= f(X_s)\int_s^t \mathrm{d}Y_u + f'(X_s)f(X_s)\int_s^t \int_s^u \mathrm{d}Y_r\mathrm{d}Y_u + \int_s^t \int_s^u \int_s^r (\cdots).
\end{aligned}$$

En itérant le raisonnement, on peut écrire $\int_s^t f(X_u)\mathrm{d}Y_u$ comme une combinaison linéaire d'intégrales itérées mettant en jeu seulement la fonction $t \mapsto Y_t$ avec comme coefficients des fonctions de $t \mapsto X_t$. L'idée de Lyons est qu'une fois données toutes les intégrales itérées de Y contre lui-même, c'est-à-dire

$$\int_s^t \mathrm{d}X_u, \int_s^t \int_s^u \mathrm{d}X_r\mathrm{d}X_u, \int_s^t \int_s^u \int_s^r \mathrm{d}X_v\mathrm{d}X_r\mathrm{d}X_u, \ldots$$

alors on peut définir

$$\int_s^t f(X_s)\mathrm{d}X_s$$

si f est une fonction assez régulière. Un rough path n'est pas seulement la donnée de la fonction $t \mapsto Y_t$ mais un objet multidimensionnel composé de la fonction et des intégrales itérées. Il faut savoir quelles conditions doit vérifier la famille des intégrales itérées. Par exemple, on a vu la relation de Chasles $\int_s^u \mathrm{d}Y_r + \int_u^t \mathrm{d}Y_r = \int_s^t \mathrm{d}Y_r$. On a par exemple aussi

$$\int_s^u \int_s^r \mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_r + \int_u^t \int_s^u \mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_r + \int_u^t \int_u^r \mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_r = \int_s^t \int_s^r \mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_r.$$

L'ensemble des relations algébriques que doivent vérifier ces intégrales itérées s'appelle les relations de Chen. Dans le cas régulier, on a

$$\int_{s \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t} \mathrm{d}Y_{s_1} \ldots \mathrm{d}Y_{s_n} = \frac{(Y_t - Y_s)^n}{n!}$$

qui est ce qu'on a obtenu en étudiant les formules de Taylor avec le théorème fondammental de l'analyse. On voit bien que ces quantités vivent dans une structure non linéaire. En plus de ces conditions algébriques, on demande une condition analytique. Si $t \mapsto Y_t$ est α-Hölder, alors il faut qu'il existe une constance $C > 0$ telle que pour tout n

$$\int_{s \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t} \mathrm{d}Y_{s_1} \ldots \mathrm{d}Y_{s_n} \leq C|t-s|^{n\alpha}.$$

Encore une fois, cette condition se comprend dans le cas régulier. Lyons a montré que si on se donne un chemin α-Hölder et ses $p := \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ premières intégrales itérées, alors on peut intégrer $t \mapsto f(Y_t)$ contre Y si f est de classe C^p. Massimiliano Gubinelli a ensuite généralisé cette construction aux fonctions "qui ressemblent" à Y, c'est-à-dire dont les variations sont controlées par celles de Y.

Remarque. *Dans le cas du mouvement Brownien, on a par exemple $p = 2$. Il suffit donc de savoir définir $\int_s^t (B_u - B_s)\mathrm{d}B_u$ par un moyen probabiliste. On peut le faire à l'aide de sommes de Riemann-Stieltjes et ici le choix par exemple de la méthode des rectangles à gauche ou à droite donne deux intégrales avec des propriétés différentes. On s'attend effectivement à ce que l'intégrale obtenue dépende du choix des intégrales itérées précédentes car le cas $\alpha + \beta > 1$ de l'intégrale de Young est effectivement le cas limite.*

Références

[FV] P.K. Friz et N.B. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2010.

[Gu] M. Gubinelli, *Controlling rough paths.* Volume 216, Journal of Functional Analysis, 2004.

[La] S. Lang, *Real and Functional Analysis.* Graduate Texts in Mathematics 142, Springer, 1993.