Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Théorème . Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. On définit le n-ième polynôme de Bernstein $B_n(f)$ par

$$\forall x \in [0,1], B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right)(1-x)^{n-p}x^p.$$

Alors $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f.

Preuve :
Soit $x \in [0,1]$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathscr{B}(x)$. Ainsi, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$ et

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right)(1-x)^{n-p}x^p = B_n(f)(x).$$

On va chercher à utiliser la convergence en probabilité de $\frac{S_n}{n}$ vers x.
Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue

$$\exists \eta > 0, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

On va alors scinder l'intégrale en deux. On a

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|<\eta} + \left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|\geq\eta}\right] \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(|x-\frac{S_n}{n}| \geq \eta\right).
\end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Bienaymé

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\eta^2} \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{Var(S_n)}{n^2\eta^2} \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\eta^2} \quad \text{indépendant de } x.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\limsup_n \|f-B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon$, et on a en faisant tendre ε vers 0 :

$$\|f-B_n(f)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemme . On définit le module de continuité $\omega(h) := \sup\left\{|f(x)-f(y)|\ ;\ |x-y| \leq h\right\}$ pour $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Alors :

$$\forall h > 0, \forall \lambda \geq 0, \quad \omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h).$$

Preuve :
Soient $x, y \in [0,1]$ tels que $x < y$ et $|x-y| \leq \lambda h$ avec $h > 0$ et $\lambda \geq 0$.
Comme $x + nh \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + nh < y \leq x + (n+1)h$. On a alors

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)| &= \left|f(y) - f(x+nh) + \sum_{i=0}^{n-1}\Big(f(x+(i+1)h) - f(x+ih)\Big)\right| \\ &\leq |f(y)-f(x+nh)| + \sum_{i=0}^{n-1}\Big|f(x+(i+1)h) - f(x+ih)\Big| \leq (n+1)\omega(h)\end{aligned}$$

Or $x + nh < y$ donc $n < \dfrac{y-x}{h} \leq \dfrac{\lambda h}{h} = \lambda$. On a donc $|f(y)-f(x)| \leq (\lambda+1)\omega(h)$ et ainsi

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h).$$

□

Théorème .

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

> **Remarque** En considérant la fonction $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, on peut montrer que cette vitesse de convergence est optimale.

Preuve :
On pose $\lambda = \sqrt{n}\left|x - \dfrac{S_n}{n}\right|$ et $h = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right] + 1\right) \quad \text{par le lemme} \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left(x - \frac{S_n}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + 1\right) \quad \text{par l'inégalité de Hölder} \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right) \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{x(1-x)} + 1\right) \\ &\leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

□