Table de S_4

Théorème . La table de caractère de S_4 est donnée par

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\epsilon)}$	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Preuve :
On sait que le nombre de caractère irréductible de S_4 est le nombre de classe de conjugaison. Or le nombre de classe de conjugaison dans S_n est le nombre de partition de n, car deux permutations sont conjuguées si et seulement si leur décomposition en cycles disjoints admet le même nombre de cycle d'une longueur donnée.
On a $4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 3+1 = 2+2$. ce qui donne

$$\mathrm{Id}, (12), (123), (1234) \text{ et } (12)(34),$$

de taille de classe de conjugaison respectives $1, 6, 8, 6$ et 3, que l'on calcule en dénombrement les possibilités d'images pour des éléments de $[\![1,4]\!]$. On a immédiatement deux caractères irréductible de degré 1, donnée par la représentation triviale et la signature.

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1

On considère maintenant la représentation par permutation ρ de S_4 naturelle sur $\mathbb{C}^4$ obtenue par $(e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)})$. Le caractère associé est le nombre de 1 sur la diagonale, c'est-à-dire le nombre de vecteurs de la base fixe. On obtient donc $\chi_\rho = (4, 2, 1, 0, 0)$. La droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est stable sous l'action de S_4, son orthogonal $H := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \ ; \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ est aussi stable sous l'action de S_4, on a donc une représentation induite par S_4 sur H de dimension 3, que l'on note ρ_s. Comme la représentation induite par ρ sur D est la représentation triviale, on a

$$\chi_s = \chi_\rho - \chi_1 = (3, 1, 0, -1, -1).$$

Il faut alors vérifier qu'elle est irréductible,

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{24}\Big(1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2\Big) = 1,$$

ce qui permet de conclure. On a

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1

En notant n_4 et n_5 les degrés des deux derniers caractères, on a $1^2+1^2+3^2+n_4^2+n_5^2=24$. Les deux derniers caractères sont donc nécéssairement de degré 2 et 3.

On considère la représentation de morphismes donnée par les représentations standard et alternée $\chi_{\mathsf{Hom}(V_s,V_\epsilon)}$. Elle est de degré $3\times 1=3$ et est donnée par $\chi_{\mathsf{Hom}(V_s,V_\epsilon)}=\overline{\chi_s}\chi_\epsilon=\chi_s\chi_\epsilon$. En la calculant, on trouve qu'elle est bien différente de χ_s et qu'elle bien irréductible, ie $\langle\chi_{\mathsf{Hom}(V_s,V_\epsilon)},\chi_{\mathsf{Hom}(V_s,V_\epsilon)}\rangle=1$.
La dernière représentation étant de degré 2, son caractère vérifie $\chi(\mathsf{Id})=2$. On remplit ensuite le reste de la ligne par orthogonalité des colonnes, ce qui permet de conclure.

□

Application . Une vision géométrique du groupe S_4 est son action via le groupe des isométries directes conservant un cube. On en déduit aussi tous les sous-groupes distingués de S_4. On voit que les caractères χ_s et $\chi_{\mathrm{Hom}(V_s,V_\varepsilon)}$ ne vont donner que le groupe trivial car on n'aura jamais $\chi(\sigma)=3$ pour $\sigma\neq\mathrm{Id}$. Le caractère trivial lui ne donne que le groupe S_4. Il reste alors à combiner les caractères χ_ε et χ_5. On trouve alors que les seuls sous-groupes distingués de S_4 sont

$$\{\mathrm{Id}\},\ A_4,\ \langle \text{ doubles transpositions } \rangle \text{ et } S_4.$$