Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Théorème . $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Preuve :
On commence par montrer que les retournements de $\mathbb{R}^3$ sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$. Soient R_D et $R_{D'}$ deux retournements d'axes respectifs D et D'. Alors il existe $S \in SO_3(\mathbb{R})$ qui envoie D sur D'.

En effet, soient e_0 et e_0' deux vecteurs unitaires qui engendrent D et D'.
On peut compléter (e_0), respectivement (e_0') en une base orthonormale $\mathscr{E} = (e_0, e_1, e_2)$, respectivement $\mathscr{E}' = (e_0', e_1', e_2')$. Alors la matrice de passage S de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est dans $O_3(\mathbb{R})$. Quitte à changer e_0 en $-e_0$, on peut supposer $P \in SO_3(\mathbb{R})$, qui envoie D sur D'.

$SR_DS^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ est alors semblable à R_D, donc c'est un retournement de $\mathbb{R}^3$. Si $x \in D'$, alors $S^{-1}x \in D$. Or R_D est l'identité sur D, donc

$$SR_DS^{-1}x = SS^{-1}x = x.$$

Donc $SR_{D'}S^{-1}$ est le retournement d'axe D', d'où le résultat.

Soit H un sous-groupe propre distingué de $SO_3(\mathbb{R})$. Montrons que H contient un retournement. Soit $h \in H$ tel que $h \neq \mathsf{Id}$. On pose

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathsf{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array} \right. .$$

φ est continue son $\varphi\Big(SO_3(\mathbb{R})\Big)$ est compact et connexe, donc c'est un segment de $\mathbb{R}$. De plus, comme H est distingué, on a

$$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}),\ ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R}).$$

donc

$$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), \varphi(g) = 1 + 2\cos(\theta) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Comme $\varphi(I) = 3$, on en déduit $\varphi\Big(SO_3(\mathbb{R})\Big) = [a, 3]$ avec $a \in [1, 3]$. Si $a = 3$, alors pour tout $g \in SO_3(\mathbb{R})$, $\mathsf{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = 3$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = \mathsf{Id}$. Donc $h \in Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{\mathsf{Id}\}$, ce qui est absurde, donc $a < 3$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3.$$

Donc il existe $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. H étant un sous-groupe distingué, on a $h_n = g_nhg_n^{-1}h^{-1} \in H$. Comme h_n est une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$, on en déduit que $h_n^n \in H$ est un retournement.
Pour conclure, il suffit de voir que les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$. En effet, les retournements étant conjugués, un sous-groupe distingué qui contient un retournement les contient tous. Donc $H = SO_3(\mathbb{R})$.

□