Un calcul de séries numériques par les séries entières

Théorème . On a
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}\quad\text{et}\quad\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{\pi^2}{16}.$$

Preuve :

Par le théorème de décomposition des séries alternées, on a $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}<\infty$. On pose pour $x\in[0,1]$
$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$
C'est une série entière de rayon de convergence 1. Donc elle est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$f'(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}.$$
Comme $f(0)=0$, on en déduit $\forall x\in[0,1[,\ f(x)=\arctan(x)$. Il reste à établir la continuité en 1. Par le théorème des séries altérnées, on a
$$\left|\sum_{k\geq n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^k\right|\leq\frac{x^n}{2n+1}\leq\frac{1}{2n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$
donc le reste converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Donc f est continue sur $[0,1]$ et
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}.$$

On pose $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$. Alors

- u_n est positive car $u_n\geq\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\geq 0$.
- u_n est décroissante car $u_{n+1}=\frac{1}{n+2}\left((n+1)u_n+\frac{1}{2n+3}\right)$ donc
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2n+3}-u_n\right)\leq 0$$
en utilisant l'inégalité précédente.
- $u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ car
$$0\leq u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\ln(2n+1)}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'après le théorème des séries altérnées, $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n < \infty$. On pose $g(x) := \sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n x^n$ pour $x \in [0,1]$. De même, on a

$$\left|\sum_{k\geq n+1}(-1)^k u_k x^k\right| \leq u_n x^n \leq u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc le reste converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Donc g est continue sur $[0,1]$. On reconnait le produit de Cauchy

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)(-x)^n = \left(\sum_{n\geq 0}(-x)^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{2n+1}\right).$$

Donc

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)u_n x^n = \frac{1}{1+x}\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

par ce qui précède. En intégrant, on a

$$xg(x) = \int_0^x \frac{\arctan(\sqrt{t})}{(1+t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

On évalue en $x=1$ et en effectuant le changement de variable $u=\sqrt{t}$, on a

$$g(1) = \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{1+u^2}\frac{2u\mathrm{d}u}{u} = \left[\arctan(u)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16},$$

d'où le résultat par continuité de g en 1.

$\square$