Méthode de Newton

Théorème . Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Alors la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est définie et converge quadratiquement vers a pour x_0 assez proche de a.

Preuve :
f' est continue en a et $f'(a) \neq 0$ donc il existe $h > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $\overline{B(a,h)}$. On considère la fonction F définie sur $\overline{B(a,h)}$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a

$$F(x) - a = \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{f'(x)}.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange en x, on a

$$|f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)| \leq \frac{\sup_{B(a,h)} |f''|}{2} |x-a|^2.$$

En posant $M := \dfrac{\sup_{B(a,h)} |f''|}{2 \inf_{B(a,h)} |f'|}$, bien définie car f' est continue et ne s'annule pas sur $\overline{B(a,h)}$, on a

$$|F(x) - a| \leq M|x-a|^2.$$

On pose $r = \inf\left\{h, \dfrac{1}{M}\right\}$ et on prend $x_0 \in B(a,r)$. Alors

$$M|x_{n+1} - a| \leq (M|x_n - a|)^2 \leq \ldots \leq (M|x_0 - a|)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Théorème . Si de plus f est convexe et $f'(a) > 0$, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers a pour tout $x_0 \in J := I \cap [a, +\infty[$.

Preuve :
f étant convexe, sa dérivée est croissante donc $\forall x \in J,\ f'(x) \geq f'(a) > 0$. Ainsi, pour $x_0 \in J$ quelconque, on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$

En particulier, la suite $(x_n)_n$ est définie et strictement décroissante ou constante à a. Par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $y_n \in [a, x_n]$ tel que

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)}(x_n - a)^2 \geq 0.$$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact $[a, x_0]$. Ses seules valeurs d'adhérences sont les points fixes de F. Or a est l'unique point fixe de F donc $(x_n)_n$ converge vers a. La convergence est encore quadratique.

□

Remarque La méthode de Newton vient avant tout d'une vision géométrique. La formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ peut être écrite sous la forme $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$. x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe (Ox) avec la tangente en x_n.