Théorème de Lax-Milgram

Théorème . Soit J une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H qui est

- continue, c'est-à-dire $\forall u,v \in H,\ |J(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$.
- coercive, c'est-à-dire $\forall u \in H,\ |J(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2$.

Soit l une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad J(u,v) = l(v).$$

Preuve :
D'après le théorème de Riesz, pour $u \in H$ il existe un unique $T(u) \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad J(u,v) = \langle T(u), v\rangle.$$

De même, il existe $w \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad l(v) = \langle w, v\rangle.$$

J étant bilinéaire, T est linéaire. De plus, T est continue car

$$\|T(u)\|^2 = J(u,T(u)) \leq M\|u\|\|T(u)\|.$$

Il faut alors montrer que T est bijectif. Si $T(u) = 0$, alors

$$0 = |\langle T(u), u\rangle| = |J(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2 \geq 0$$

donc $u = 0$, ainsi T est injectif.

Pour la surjectivité, on montre que l'image est dense et fermée. Soit $(u_n)_n$ une suite de H telle que $T(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \in H$. On a

$$\begin{aligned}\|u_p - u_q\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha}|\langle J(u_p - u_q, u_p - u_q)| \leq \frac{1}{\alpha}|\langle T(u_p) - T(u_q), u_p - u_q\rangle| \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|T(u_p) - T(u_q)\|\|u_p - u_q\|.\end{aligned}$$

Donc $\|T(u_p) - T(u_q)\| \leq \alpha\varepsilon \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. Ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy et converge donc vers $u \in H$. Par continuité de J, on a $v = T(u) \in \mathrm{Im}(T)$ qui est donc fermée.
Pour la densité, on considère $z \in \mathrm{Im}(T)^\perp$. Alors

$$0 = |\langle T(z), z\rangle| = |J(z,z)| \geq \alpha\|z\|^2 \geq 0$$

donc $z = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(T)$ est fermée et dense dans H donc T est surjective.

□

Application . On chercher les solutions faibles de

$$\begin{cases} -(au')' + \beta u' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f \in L^2$, $a \in L^\infty$ et $\beta \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $a \geq \alpha$ et $\beta' \leq 2$, alors il existe une unique solution u au problème variationnel associé dans $H = H_0^1(0,1)$, c'est-à-dire telle que

$$\forall v \in H, \quad J(u,v) = \int_0^1 (au'v' + \beta u'v + uv)\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 fv\mathrm{d}\lambda = l(v).$$

On munit H de la norme $\|u\|_{H_0^1} := \|u\|_2 + \|u'\|_2$. J est continue sur H par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il reste à montrer la coercivité de J pour conclure à l'aide du théorème de Lax-Milgram.
On a

$$\int_0^1 \beta uu'\mathrm{d}\lambda = -\int \beta' \frac{u^2}{2}\mathrm{d}\lambda \geq \int u^2\mathrm{d}\lambda \quad \text{et} \quad \int_0^1 a(u')^2\mathrm{d}\lambda \geq \alpha \int_0^1 (u')^2\mathrm{d}\lambda.$$

Donc

$$|J(u,u)| = \int_0^1 \Big(a(u')^2 + \beta u'u + uv\Big)\mathrm{d}\lambda \geq \alpha\|u'\|_2^2 + 2\|u\|_2^2 \geq (2+\alpha)\|u\|_{H_0^1},$$

ce qui permet de conclure.

> **Remarque** Dans le cas où J est symétrique, le théorème de représentation de Riesz donne immédiatement le résutat car J est alors un produit scalaire. Dans ce cas, un calcul simple montre de plus que la solution est l'unique minimiseur de la fonctionnelle
>
> $$\frac{1}{2}J(u,u) - l(u).$$