Image de l'exponentielle

Théorème . Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$, les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[A]$.

Remarque On applique ici le théorème d'inversion locale à $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Cependant $\mathbb{C}[A]$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, cela peut alors paraître problématique. Or on considère ici $\mathbb{C}[A]$ munie de sa topologie induite par celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, qui est celle de sa structure d'espace vectoriel de dimension finie et on obtient donc un voisinage relatif à $\mathbb{C}[A]$, ce qui nous suffit.

Preuve :
Tout d'abord, $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.
En effet, la premère inclusion est immédiate. Réciproquement, si $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, on sait que $\chi_M(0) = \det(M)$. Le théorème de Cayley-Hamilton assure alors que $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$, M étant un polynôme en A, ce qui permet de conclure.

Ensuite, $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. On montre qu'il est aussi connexe. Soient $M_0, M_1 \in \mathbb{C}[A]^\times$. Si on pose

$$M(t) = (1-t)M_0 + tM_1 \quad \text{pour} \quad t \in [0,1],$$

alors le chemin reste dans $\mathbb{C}[A]$ mais $\det(M(t))$ peut s'annuler. Or la fonction $z \mapsto \det(M(z))$ est polynomiale en z, elle s'annule donc en un nombre fini de fois. $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de point est connexe par arc donc on peut trouver un chemin γ qui relie 0 dans 1 sans passer par ces points. Ainsi $M \circ \gamma$ relie M_0 à M_1, ce qui permet de conclure que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arc donc connexe.

Comme $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, il suffit alors de montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$ pour conclure à l'aide d'un argument de connexité.

On a $d_0\exp = I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Le théorème d'inversion locale donne que l'exponentielle envoie un voisinage $\mathscr{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ sur un voisinage $\mathscr{V}$ de I_n dans $\mathbb{C}[A]^\times$.
Soit $M \in \mathbb{C}[A]$. Alors $\mathscr{V}_M := \{Ve^M \ ; \ V \in \mathscr{V}\}$ est un voisinage de e^M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ car pour tout $V = e^U \in \mathscr{V}$, on a

$$Ve^M = e^U e^M = e^{U+M} \in \exp(\mathbb{C}[A]),$$

ce qui montre que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.
Pour montrer que c'est un fermé, on montre que

$$X = \mathbb{C}[A]^\times \backslash \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in X} M.\exp(\mathbb{C}[A]),$$

qui est alors ouvert. La première inclusion est vraie car $I_n = e^0 \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Réciproquement, soient $M \in X$ et $P(A) \in \mathbb{C}[A]$ et posons $N = Me^{P(A)}$. Alors

$$M = Ne^{-P(A)} \notin \exp(\mathbb{C}[A]),$$

donc N n'est pas dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. On peut alors conclure car, M étant inversible, $M\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert.

□

Corollaire . L'exponentielle est surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. L'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par l'exponentielle est $\{A^2 \,; A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Preuve :
La surjectivité découle du fait que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $A \in \mathbb{C}[A]^\times$ et ainsi il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$. Pour le cas réel, soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\left(e^{\frac{M}{2}}\right)^2 = e^M,$$

ce qui donne la première inclusion. Réciproquement, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = e^{P(M)}$. Comme M est à coefficients dans $\mathbb{R}$, on a aussi $M = e^{\overline{P}(M)}$. Donc $M^2 = e^{(P+\bar{P})(M)}$ ce qui permet de conclure.

□

Remarque Le même argument utilisé pour l'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par l'exponentielle montre que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ est un carré. Peut-on obtenir ce résultat de manière plus directe ? Si on considère A sous sa forme de jordan, on est ramené à trouver une racine carré d'un bloc de Jordan $\lambda I_n + D$, D ayant seulement des 1 sur la surdiagonale. L'Analyse nous donne un développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ valable pour x petit. On a donc une égalité formelle $\sqrt{1+X} = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, ie $\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)^2 = 1+X$. On peut alors utiliser la théorie des polynômes d'endormophismes, en injectant $X = N$. Cette matrice étant nilpotente, il y a bien convergence, et

$$I_n + N = \Big(\sum_{n\geq 0} a_n N^n\Big)^2 = \Big(\sum_{n=0}^{n_0} a_n N^n\Big)^2.$$

On a traité le cas $\lambda = 1$. A étant inversible, on sait que $\lambda \neq 0$ et on peut se ramener au cas $\lambda = 1$ en factorisant par $\sqrt{\lambda}$ qui existe toujours dans $\mathbb{C}$. On peut remarquer un raisonnement qu'on retrouve ailleurs, la notion de nilpotence en algèbre peut être vue comme un anologue de la notion de "petit" d'analyse.