Générateurs de groupes linéaires

Théorème . Soit $\mathbb{K}$ un corps.

- Les transvections $\Big(T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}\Big)$ engendrent le groupe $SL_n(\mathbb{K})$.
- Les transvections et les dilatations $\Big(D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}\Big)$ engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.
- Les matrices diagonalisables inversibles engendrent $GL_n(\mathbb{R})$.

Preuve :
On a $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$ donc $G := \Big\langle T_{ij}(\lambda)\Big\rangle \subset SL_n(\mathbb{K})$. On sait que

$$\Big(\text{multiplier à gauche par } T_{ij}(\lambda)\Big) \iff \Big(L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j\Big)$$

et

$$\Big(\text{multiplier à gauche par } T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)\Big) \iff \Big(L_i \longleftarrow L_j \text{ et } L_j \longleftarrow -L_i\Big)$$

De plus, les memes opérations à droite permettent d'agir sur les colonnes. Soit $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ Alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i1} \neq 0$.
Si $i \neq 1$, on effectue $L_1 \longleftarrow L_i$ et $L_i \longleftarrow -L_1$ et on se ramène à $i = 1$. Ensuite pour $j \in [\![2,n]\!]$, on fait

- si $a_{j1} \neq 0$, on effectue $L_j \longleftarrow L_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} L_1$.
- si $a_{1J} \neq 0$, on effectue $C_j \longleftarrow C_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} L_1$.

On a alors $M_0, N_0 \in G$ et $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que

$$M_0 A N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

On itère sur A_1 et par récurrence on a $M, N \in G$ telles que

$$MAN = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \det(A) \end{pmatrix} = D_n\Big(\det(A)\Big).$$

Donc $G = SL_n(\mathbb{K})$.
De plus, comme $D_n\Big(\det(A)\Big)$ est une matrice de dilatation, on a $\Big\langle T_{ij}(\lambda), D_i(\alpha)\Big\rangle = GL_n(\mathbb{K})$.
Pour conclure pour les matrices diagonalisables inversibles, comme les matrices de dilation sont diagonalisables, il suffit d'écrire

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & n \end{pmatrix} T_{ij}(\lambda) = D \times D'$$

avec D et D' diagonalisables inversibles car ayant n valeurs propres simples non nulles.

$\square$

Application . $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

On montre que toute matrice $A \in SL_n(\mathbb{R})$ est reliée à I_n par un chemin continue. D'après le théorème, il existe des transvections $T_{i_1 j_1}(\lambda_1), \ldots, T_{i_r j_r}(\lambda_r)$ telles que

$$A = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k j_k}(\lambda_j).$$

On pose $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \prod_{k=1}^{r} T_{i_k j_k}(t\lambda_i) \end{array} \right.$. Ainsi $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = A$ et φ est continue à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.