Connexité et formes quadratiques réelles

Théorème . Soit $(E,\|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n. On note $\mathscr{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, que l'on munit de la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\|=1} |q(x)|,$$

et $\mathscr{Q}^*(E)$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérée sur E.
Alors $\mathscr{Q}^*(E)$ est un ouvert de $\mathscr{Q}(E)$ et ses composantes connexes sont les

$$\mathscr{Q}_i(E) := \{q \in \mathscr{Q}(E) \text{ ; la signature de } q \text{ est } (i, n-i)\},$$

avec $i \in [\![1,n]\!]$.

Preuve :
On commence par montrer que $\mathscr{Q}^*(E)$ est un ouvert de $\mathscr{Q}(E)$. En choisissant une base de E, $Q(E)$ s'identifie à $S_n(\mathbb{R})$ via l'homéomorphisme $q \mapsto \mathrm{mat}(q)$. Ainsi $\mathscr{Q}^*(E)$ s'identifie au sous-espace des matrices inversibles de $S_n(\mathbb{R})$.
Comme la fonction déterminant est continue, $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\mathscr{Q}^*(E) = \bigsqcup_{i=0}^{n} \mathscr{Q}_i(E).$$

On montre alors que $\mathscr{Q}_i(E)$ est aussi un ouvert. Soit $q \in \mathscr{Q}_i(E)$ avec $i \in [\![0,n]\!]$. Comme la signature de q est $(i, n-i)$, il existe deux sous-espaces vectoriel supplémentaire F^+ et F^- telle que

$$q_+ = q|_{F^+} \text{ soit définie positive} \quad \text{et} \quad q_- = q|_{F^-} \text{ soit définie négative.}$$

Comme $\sqrt{|q(.)|}$ est une norme sur F^+ et F^- qui sont de dimension finie, il existe $a, b > 0$ tels que

$$\forall x \in F^+, q(x) \geq a^2\|x\|^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in F^-, q(x) \leq -b^2\|x\|^2.$$

En posant $k = \min(a^2, b^2)$, on a

$$\forall x \in F^+, q(x) \geq k\|x\|^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in F^-, q(x) \leq -k\|x\|^2.$$

Soit $\tilde{q} \in \mathscr{Q}(E)$ telle que $N(q - \tilde{q}) < k$. Alors

$$\forall x \in F^+ \backslash \{0\}, \quad q(x) - \tilde{q}(x) < k\|x\|^2$$

donc $\tilde{q}(x) > q(x) - k\|x\|^2 \geq 0$, ie $\tilde{q}$ est définie positive sur F^+. De même,

$$\forall x \in F^- \backslash \{0\}, \quad \tilde{q}(x) - q(x) < k\|x\|^2$$

donc $\tilde{q}$ est définie négative sur F^-, donc $\tilde{q} \in \mathscr{Q}_i(E)$ et ainsi $\mathscr{Q}_i(E)$ est un ouvert.

$\mathscr{Q}^*(E)$ étant l'union disjointe des ouverts $\mathscr{Q}_i(E)$, il suffit de montrer qu'ils sont connexes. Soient $q, \tilde{q} \in \mathscr{Q}_i(E)$ de matrices respectives Q et $\tilde{Q}$. D'après le théorème spectral, il existe $P, \tilde{P} \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q = PD_i{}^tP \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = \tilde{P}D_i{}^t\tilde{P},$$

avec $D_i = \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_{n-i} \end{pmatrix}$ Les matrices P et $\tilde{P}$ étant les matrices de changement de base, on peut supposer $\det(P) = \det(\tilde{P}) = 1$ quitte à remplacer la première colone par son opposée. Or $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc, donc il existe un chemin continu de P à $\tilde{P}$ dans $SL_n(\mathbb{R})$, ainsi $\mathscr{Q}_i(E)$ est connexe par arc.

$\square$