# Théorème des extrema liés

**Lemme .** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ des formes linéaires sur $E$. Alors

$$\Big(\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)\Big) \iff \Big(\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)\Big).$$

**Preuve :**
La première implication est immédiate.
Réciproquement, on suppose $\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$. Alors

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(\varphi)^{\perp}.$$

En passant au dual, on a

$$\mathrm{Vect}(\varphi) = \left(\mathrm{Vect}(\varphi)^{\perp}\right)^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

donc $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

□

**Théorème .** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions de classe $C^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\Gamma := \left\{ x \in U \ ; \ \forall i \in [\![1, r]\!], g_i(x) = 0 \right\}.$$

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $D_a g_1, \dots, D_a g_r$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$D_a f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i D_a g_i.$$

**Preuve :**
$\Gamma$ est lisse en $a$ donc

$$T_a\Gamma = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(D_a g_i).$$

Soit $v \in T_a\Gamma$. Alors il existe $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Alors $f \circ \gamma$ admet un extremum en $0$ donc

$$0 = \left(f \circ \gamma\right)'(0) = D_{\gamma(0)} f\left(\gamma'(0)\right) = D_a f(v).$$

Donc

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(D_a g_i) \subset \ker(D_a f)$$

ce qui permet de conclure par le lemme.

□

**Corollaire .** Pour tout famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2.$$

**Preuve :**
On cherche à maximiser le déterminant sur

$$\Gamma = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \ ; \ \forall i \in [\![1, n]\!], \|v_i\|_2^2 = 1 \right\}.$$

Comme le déterminant est continue sur $\Gamma$ qui est compact, le maximum existe. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un tel maximum.
Alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre, sinon $\det(v_1, \ldots, v_n) = 0$. D'après le théorème des extrema liés, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i \langle v_i, h_i \rangle$$

pour $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on évalue en $(h_k)_{k \in [\![1,n]\!]} = (v_i \delta_{ik})_{k \in [\![1,n]\!]}$, on a

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = 2\lambda_i \|v_i\|^2$$

donc $\lambda_i \neq 0$. On évalue maintenant en $(h_k)_{k \in [\![1,n]\!]} = (v_j \delta_{ik})_{k \in [\![1,n]\!]}$ avec $i \neq j$, ce qui donne

$$0 = 2\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle$$

donc $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ car $\lambda_i \neq 0$. Donc $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthonormale. En particulier, $\det(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$. Donc

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in \Gamma, \quad |\det(u_1, \ldots, u_n)| \leq 1.$$

Par $n$-linéaire du déterminant, on peut conclure que

$$\forall u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n, \quad |\det(u_1, \ldots, u_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_2.$$

$\square$