Densité des polynômes orthogonaux

Théorème . Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$. Alors l'unique famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \geq 1, \quad \deg(P_n) = n$$

forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque ρ est appelée fonction de poids, c'est-à-dire une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$. Pour une telle fonction de poids, on peut définir $L^2(I,\rho)$ comme les fonctions f telle que $\int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$, que l'on munit du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$. Si elle vérifie $\forall n \geq 0, \int_I |x|^n\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$, alors $L^2(I,\rho)$ contient les polynômes. Il existe alors une unique famille de polynômes orthogonaux comme annoncée, et on peut l'obtenir en appliquant la méthode de Gram-Schmidt à la base $(x^n)_n$. Sous l'hypothèse plus forte faite dans l'énoncée sur la fonction de poids, on peut montrer qu'on obtient ainsi une base hilbertienne.

Preuve :
La famille $(P_n)_n$ étant orthonormale, il suffit de montrer que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans $H := L^2(I,\rho)$. Pour cela, on montre que son orthogonal est l'espace vectoriel nul. Or, par construction, on a $\mathrm{Vect}(P_n \ ; \ n \geq 0) = \mathrm{Vect}(g_n : x \mapsto x^n \ ; \ n \geq 0)$, il suffit donc de montrer pour $f \in H$

$$\forall n \geq 0, \langle f, g_n\rangle = 0 \implies f = 0.$$

On suppose f comme telle, et on pose $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq \frac{1+x^2}{2},$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leq \frac{1+|f(x)|^2}{2}\rho(x)\mathbb{1}_I(x).$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ car ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Sa transformée de Fourier existe, elle est donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)\rho(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

On va la prolonger en une fonction holomorphe sur $B := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$. Pour $z \in B$ et $x \in I$, on pose $g(z,x) := e^{-ixz}f(x)\rho(x)$. On a

$$|g(z,x)| = e^{\mathrm{Im}(z)x}|f(x)|\rho(x) \leq e^{\frac{a}{2}|x|}|f(x)|\rho(x) \leq \frac{e^{a|x|}+|f(x)|^2}{2}\rho(x),$$

donc $F : z \mapsto \int_I g(z,x)\mathrm{d}x$ est bien définie sur B. On a

- Pour tout $z \in B$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.
- On a $\forall z \in B, \forall x \in I, |g(z,x)| \leq \dfrac{e^{a|x|} + |f(x)|^2}{2}\rho(x)$ qui ne dépend pas de z et qui est intégrable sur I.

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrable, F est holomorphe sur B et prolonge $\widehat{\varphi}$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)e^0 \mathrm{d}x = (-i)^n \langle g_n, f\rangle = 0.$$

Or F étant holomorphe, elle est développable en série entière au voisinage de 0, et y est donc nulle. B étant connexe, on en déduit que F est identiquement nulle sur B, et ainsi $\widehat{\varphi}$ l'est sur $\mathbb{R}$. L'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ permet de conclure.

□

Remarque Pour montrer que l'hypothèse est nécéssaire, on peut exhiber le contre-exemple $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$, avec $I = \mathbb{R}_+^*$. La fonction f définie par $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$ est alors orthogonal à tout polynôme.