Dénombrement des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{F}_q)$

Théorème . On note $\mathbb{F}_q$ le corps à $q = p^r$ éléments, p premier et $r \geq 0$ et $\mathscr{D}_n(q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(q) := \mathscr{M}_n(\mathbb{F}_q)$. Alors, avec la convention $|GL_0(q)| = 1$, on a

$$|\mathscr{D}_n(q)| = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\ldots+m_q=n}} \frac{|GL_n(q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(q)|}.$$

Preuve :
$GL_n(q)$ agit par conjugaison sur $\mathscr{D}_n(q)$. On commence par décrire les orbites. Pour $M \in \mathscr{D}_n(q)$, on a

$$\mathrm{Orb}(M) = \{PMP^{-1} \ ; \ P \in GL_n(q) \ \}.$$

M est diagonalisable, donc il existe $m = (m_1, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^q$ tel que $D_m \in \mathrm{Orb}(M)$ avec

$$D_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n I_{m_q} \end{pmatrix}$$

en notant $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. De plus, si $D_{m'} \in \mathrm{Orb}(D_m)$, alors

$$\chi_{D_{m'}} = \chi_{D_m} = \prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{m_i},$$

donc $m = m'$. On a donc

$$\mathscr{D}_n(q) = \bigsqcup_{m_1+\ldots+m_q=n} \mathrm{Orb}(D_m),$$

et il suffit alors de trouver le cardinal des orbites.

Par la relation orbite-stabilisateur, on a

$$\left|\mathrm{Orb}(D_m)\right| = \frac{|GL_n(q)|}{|\mathrm{Stab}(D_m)|}.$$

Si $P \in \mathrm{Stab}(D_m)$, alors $PD_m = D_m P$. Pour $X \in E_\lambda(D_m)$, on a $D_m PX = PD_m X = \lambda PX$ et donc $PX \in E_\lambda(D_m)$. Or $\mathbb{K}^n = \bigoplus_\lambda E_\lambda(D_m)$ donc

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_q \end{pmatrix}$$

avec $P_i \in GL_{m_i}(q)$. Réciproquement, P de cette forme vérifie $PD_m = D_m P$. Donc

$$\left|\mathrm{Stab}(D_m)\right| = \prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(q)|.$$

On peut alors conclure

$$|\mathscr{D}_n(q)| = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\ldots+m_q=n}} \frac{|GL_n(q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(q)|}.$$

□

Remarque Pour avoir réellement calculer le cardinal, il faut aussi savoir compter $GL_n(q)$. On peut le faire en comptant les bases de $\mathbb{F}_q^n$, car une matrice est dans $GL_n(q)$ si et seulement si elle envoie une base sur une base. Il y a $q^n - 1$ choix pour le premier vecteur de la base image, puis on retire une droite ce qui laisse $q^n - q$ choix pour le deuxième vecteur. Au final, on a

$$\Big|GL_n(q)\Big| = (q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1}).$$